**Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, első félév**

*Első alkalom*

**1.** *Vezessük le az alábbi két azonosságot a mértani sor összegképletéből, és a második képletet az elsőből.*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + - \cdots + b^{2n})\,.$$

**2.** *Mutassuk meg, hogy* $2^{111111} - 1$ *összetett szám. Hogyan lehet általánosítani az állítást?*

**3.** *Mutassuk meg, hogy* $2^{111111} + 3^{111111}$ *osztható* 35*-tel.*

**4.** *Mutassuk meg, hogy* $2^{3072} + 1$ *összetett szám. Hogyan lehet általánosítani az állítást?*

**5.** *Bizonyítsuk be a 9-cel és 11-gyel való oszthatóság ismert két szabályát a 10-es számrendszerben. Hogyan lehet ezeket a szabályokat tetszőleges,* $g$ *alapú számrendszerre általánosítani?*

**6.** *A közönséges* $8 \times 8$*-as sakktáblából kivesszük az egyik átló két végpontján lévő két sarokkockát. Lefedhető-e a kapott alakzat* $2 \times 1$*-es dominókkal?*

**7.** *Igazoljuk, hogy egy* $m \times m$*-es sakktábla akkor és csak akkor fedhető le* $k \times 1$*-es dominókkal, ha* $k$ *osztója* $m$*-nek.*

**8.** *Megoldható-e az egész számok körében az* $x^2 + 5y = 1002$ *egyenlet?*

**9.** *A modulo* 5 *maradékok vizsgálatával mutassuk meg, hogy* $a^5 - a$ *minden egész* $a$*-ra osztható* 5*-tel. Milyen* $a$ *egészekre igaz, hogy* $a^4 - 1$ *osztható* 5*-tel?*

**10.** *Fogalmazzuk meg, mit jelent a modulo* 5 osztás *művelete. Elvégezhető-e ez mindig? Mi a helyzet modulo* 6*?*

**11.** *Mutassuk meg a modulo* 8 *szorzástábla felhasználásával, hogy páratlan szám négyzete* 8*-cal osztva mindig* 1 *maradékot ad. Adjunk erre az észrevételre közvetlen bizonyítást is.*

**12.** *Adjunk meg olyan* $a$ *és* $b$ *egészeket, melyre* $11a + 9b = 1$*. Véges vagy végtelen sok megoldás van?*

**13.** *Mely* $x$ *egészekre teljesül, hogy* $5 \mid x^2 - 2x + 2$*? És az, hogy* $7 \mid x^2 - 2x + 2$*?*

**14.** *Mely* $x$ *egészekre teljesül, hogy* $101 \mid x^2 - 2x + 2$*, illetve, hogy* $101 \mid x^2 - 13x - 3$*?*

**15.** *Melyek azok a* $p$ *természetes számok, melyekre* $p$*,* $p+2$ *és* $p+4$ *mindegyike prímszám?*

**16.** *Igazoljuk, hogy ha* $p$ *is és* $p^2 + 2$ *is prímszám, akkor* $p^3 + 4$ *is az. Igaz-e, hogy ha* $p$ *is és* $p^2 + 5$ *is prímszám, akkor* $p^3 + 4$ *is az?*

**17.** *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében.*

*a)* $x^2 - 4y = 10$.
*b)* $x^2 - 3y = 20$.
*c)* $x^2 + 3y^2 = 2z^2$.

**18.** *Igazoljuk, hogy a modulo* $m$ *maradékképzés* műveletartó *leképezés, azaz összeg maradéka a maradékok modulo* $m$ *vett összege, és szorzat maradéka a maradékok modulo* $m$ *vett szorzata.*