Matematikus szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldások

1. Van, például $x+y=1,\ \ x+y=7,\ \ 3x+y=1.$

2. A mátrix felbontása

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Az eredmény 4, azaz az összes transzformációt megkapjuk. Ez például abból következik, hogy a 2×2-es mátrixok vektorterének szokásos bázisában két elem idempotens (ahol a főátlóban van az 1-es), a másik kettőnek pedig nulla a négyzete.

4. 1995, azaz hárommal kevesebb, mint V dimenziója. Ennek oka az, hogy a $p(i)=0$ két lineáris feltételt foglal magába, azt, hogy a valós és képzetes rész is nulla legyen. Azaz ha $U_1=\{p\in V \mid \mathrm{Re}(p(i))=0\}$ és $U_2=\{p\in U_1 \mid \mathrm{Im}(p(i))=0\}$ (ezek nyilván alterek), akkor $U=\{p\in U_2 \mid p(1)=p(3)\}$. Mivel $V \supsetneqq U_1 \supsetneqq U_2 \supsetneqq U$ (azt, hogy a tartalmazások valódiak, rendre az 1, x, x^2+1 polinomok mutatják), azt kapjuk, hogy $\dim U \le 1995$. Másfelől viszont $(x^2+1)(4x^n+1-5\cdot 3^n)\in U$, ha $1\le n\le 1995$, és ezek csupa különböző fokúak, azaz függetlenek. Tehát $\dim U \ge 1995$.

Elegánsabb, és lényegében számolásmentes a következő megoldás. Tekintsük V-n az $A(p)=(\mathrm{Re}(p(i)),\ \mathrm{Im}(p(i)),\ p(3)-p(1))$ képlettel definiált lineáris leképezést. Ennek magja U. Mivel $A(1)=(1,1,0)$, $A(x)=(0,1,2)$ és $A(x^2+1)=(0,0,8)$ nyilván lineárisan független vektorok, ezért $\dim \mathrm{Im} A=3$, és így a dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Ker} A = 1998-3$.

5. Azok, amelyek dimenziója legfeljebb 1. Ilyenkor ugyanis nincs más altér, mint $\{0\}$ és az egész tér, és így a feltétel nyilván teljesül. Ha viszont a dimenzió legalább kettő, akkor legyenek u és v független vektorok, $U=\langle u\rangle$, $V=\langle v\rangle$ és $W=\langle u+v\rangle$. Ekkor $u+v\in U+V$, tehát $W\subseteq U+V$, és ezért $(U+V)\cap W=W$. Másrészt viszont $U\cap W=\{0\}$, hiszen $\lambda u=\mu(u+v)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda=\mu=0$. Hasonlóan $V\cap W=\{0\}$, és ezért a feltétel nem teljesül. Erre a bizonyításra úgy lehet rájönni, hogy először a valós síkot vizsgáljuk, és három különböző egyenest tekintünk.

6. Azok, amelyek dimenziója legfeljebb a fele a tér dimenziójának. *Szükségesség:* a dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Im} A+\dim \mathrm{Ker} A=\dim V$, azaz $\mathrm{Im} A$ és $\mathrm{Ker} A$ közül az, amelyik dimenziója nem nagyobb, az legfeljebb $(\dim V)/2$ dimenziós lehet, és így a metszet dimenziója is legfeljebb ennyi. *Elégségesség:* Legyen U egy legfeljebb $(\dim V)/2$ dimenziós altér, és ennek egy $b_1,\dots,b_n$ bázisát egészítsük ki a $c_1,\dots,c_k$ vektorokkal V egy bázisává, ahol tehát $n\le k$. Legyen A olyan lineáris transzformáció, melyre $A(b_i)=0$, $A(c_i)=b_i$ ha $1\le i\le n$, és $A(c_i)\in U$ ha $i>n$. Ekkor $\mathrm{Im} A=U\subseteq \mathrm{Ker} A$.