Matematikus gyakorlat, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi

Minden feladatot külön lapra írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakvezér neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, ami $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos, $\mathbb{Z}_2$ felett egynél több megoldása van, és $\mathbb{Z}_3$ felett pontosan 1?*

2. *Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ felett az 1, $1+x$, $1+x+x^2$, $1+x+x^2+x^3$ bázissal, U pedig az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^{1\times 3}$ vektortér az $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ bázissal. Tekintsük azt az $A : V \to U$ lineáris leképezést, amelyre $p \in V$ esetén $A(p) = (p(1), p(-1), p(1) + p(-1))$. Írjuk fel A mátrixát a megadott bázispárban (azt nem kell belátni, hogy ezek tényleg bázisok), és bontsuk fel a kapott mátrixot rangnyi számú diád összegére.*

3. *A sík lineáris transzformációinak vektorterében tekintsük azt az alteret, amit az összes nilpotens és az összes idempotens transzformációk együttvéve generálnak. Mennyi ennek a dimenziója?*

4. *Legyen V a legfeljebb 1997 fokú racionális együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{Q}$ felett, és álljon U a V azon p elemeiből, amelyekre $p(i) = 0$ és $p(1) = p(3)$. Mennyi lesz az U altér dimenziója? (Az i mint komplex szám értendő.)*

5. *Melyek azok a vektorterek, amelyekben bármely U, V, W alterekre igaz, hogy $(U + V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)$?*

6. *A véges dimenziós V vektortér mely alterei állnak elő $\mathrm{Im}A \cap \mathrm{Ker}A$ alakban, ahol A lineáris transzformációja V-nek?*