Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Kilencedik alkalom

Lineáris *transzformáció* mátrixának kiszámításakor fel szokás tenni, hogy a bázispár két tagja ugyanaz. Az alábbi vektorterek egy-egy természetesen adódó bázisát a „szokásos" bázisnak nevezzük: A T test feletti T^n vektortérben (n magas oszlopvektorok) azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyekben egyetlen komponens 1, a többi nulla (a sorfolytonosság sorrendjében tekintve). A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ bázis. A síkon $\mathbb{R}$ felett az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok. A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i. Egy T testben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

1. *Az alábbi A leképezéseknek adjuk meg a mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban, és határozzuk meg a kép- és magteret. Amelyek transzformációk is, azokról döntsük el, hogy nilpotensek, illetve idempotensek-e.*

a) *V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítés esetében számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$ bázisban.*

b) *$V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az $a + bi$ komplex számmal való szorzás.*

c) *$V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.*

d) *$V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, A a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).*

e) *$V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.*

f) *$V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).*

2. *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? A sík mely lineáris transzformációinak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

3. *Van-e a síkon olyan nem nulla lineáris transzformáció, melynek négyzete nulla? Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $M^2 = -E$ egyenlet?*

4. *Legyen $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Igazoljuk az alábbiakat.*

a) *Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.*

b) *Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.*

c) *Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.*

d) *Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.*

5. *Mutassuk meg, hogy ha A idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, akkor* $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Ker}(A) = V$ *és* $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. *Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja pontosan akkor idempotens, ha egy altérre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.*

6. *Alteret alkotnak-e a sík lineáris transzformációinak vektorterében azok a leképezések, melyek az $y = x$ egyenest az x-tengely egy részébe képzik?*

7. *Legyen T test. Határozzuk meg a $T^{m\times n}$ dimenzióját T felett.*

8. *Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha* $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, *következik-e ebből, hogy* $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? *Igaz-e a megfordítás?*

9*. *Legyen A nilpotens, $k \times k$-as mátrix. Igazoljuk, hogy $A^k = 0$.*