Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Nyolcadik alkalom

1. *Igazoljuk tetszőleges T test feletti V vektortérben az alábbi állításokat.*
a) $(\forall\lambda \in T)(\forall v \in V)(\lambda v = 0_V \iff (\lambda = 0_T \vee v = 0_V))$.
b) $(\forall v \in V)((-1_T)v = -v)$.

2. *Legyen V a $T[x]$ mint T feletti vektortér. Alteret alkotnak-e a legfeljebb tizedfokú polinomok a nullvektorral együtt? És a páros fokú polinomok a nullvektorral együtt?*

3. *Igaz-e $\mathbb{R}$ felett, hogy $x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2\rangle$? És $\langle x, x^2+2, x+2\rangle = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$?*

4. *Igazoljuk az alábbiakat.*
a) *Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.*
b) *$\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.*
c) *Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1+v_2, v_2, v_3\}$ is független.*
d) *Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.*

5. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér, és $B \subseteq V$. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
a) *B pontosan akkor bázis, ha a generátorrendszerek között tartalmazásra minimális.*
b) *B pontosan akkor bázis, ha a független rendszerek között tartalmazásra maximális.*
c) *Ha B elemszáma n, és független, akkor bázis.*
d) *Ha B elemszáma n, és generátorrendszer, akkor bázis.*
e) *Ha W altér V-ben, akkor $\dim W \le \dim V$, és egyenlőség csak úgy lehet, ha $V = W$.*

6. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*
a) *A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.*
b) *A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett.*
c) *Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.*
d) *Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.*

7. *Határozzuk meg a sík és a tér összes altereit.*

8. *Legyen V vektortér a T test felett.*
a) *Mi az üres halmaz által generált altér?*
b) *Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.*
c) *Mutassuk meg, hogy két altér uniója akkor és csak akkor altér, ha az egyik tartalmazza a másikat.*
d) *Ha U_1 és U_2 alterek V-ben, akkor legyen $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\langle U_1 \cup U_2\rangle = U_1 + U_2$.*
e) *Mutassuk meg, hogy ha U, V, W alterek egy vektortérben és $U \supseteq V$, akkor fennáll az úgynevezett moduláris összefüggés: $U \cap (W+V) = (U \cap W) + V$.*

9. *Legyen V véges dimenziós vektortér, és $U, W \le V$.*
a) *Mutassuk meg, hogy U bármely bázisa kiegészíthető V egy bázisává.*
b) *Igazoljuk, hogy van olyan $U' \le V$, hogy $U + U' = V$ és $U \cap U' = \{0\}$.*
c) *Bizonyítsuk be, hogy $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.*

10. *Mutassuk meg, hogy $n \ge 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n-1$-dimenziós altere van.*