Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Hetedik alkalom

Legyen V vektortér a T test felett. A $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ összeget a $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$-beli együtthatós *lineáris kombinációjának* nevezzük. Ez a lineáris kombináció *triviális,* ha mindegyik együttható nulla. A $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorrendszert *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort.

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

HF:

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

4. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 1997. Melyek ezek a számok? HF: adott $a \neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$

5. *Egy n-szög csúcsaira számokat akarunk úgy írni, hogy bármelyik csúcsból induljunk is el a sokszög mentén, a sorra következő m szám összege 1 legyen. Mely m és n értékek esetén lehetséges ez úgy, hogy valamelyik csúcsra $1/m$-től különböző szám kerüljön?*

6. *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben lineárisan függetlenek-e az alábbi polinomrendszerek:* $\{1, x, x^2\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$.

7*. *Meg lehet-e adni $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektort úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független legyen?*