Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Hatodik alkalom

A $\mathbb{Z}_m^+$ csoport elemei a $0,\dots,m-1$, a művelet az összeadás modulo m. A $\mathbb{Z}_m^\times$ csoport elemei a $0,\dots,m-1$ közül az m-hez relatív prímek, a művelet a szorzás modulo m. A csoport elemeinek a száma $\varphi(m)$, ez az *Euler-függvény.* Ebben a csoportban a g elem rendjét $o_m(g)$ jelöli. Ezt a jelölést kiterjesztjük minden m-hez relatív prím h-ra úgy, hogy $g \equiv h \ (m)$ esetén legyen $o_m(h) = o_m(g)$. Általános csoportban a g elem rendjét $|g|$ jelöli.

1. *Döntsük el, melyek egységgyökök az alábbi számok közül. Mennyi ezek rendje?*

$$1\,, \quad -1\,, \quad i\,, \quad 1+i\,, \quad (1+i)/\sqrt{2}\,, \quad \cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi)\,, \quad \cos(336°)+i\sin(336°)\,.$$

Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök? Írjuk fel az összes komplex 24-ik egységgyököt, és határozzuk meg ezek rendjét.

2. *Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $-i\varepsilon$ rendje?*

3. *Számítsuk ki a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomot, ahol $n = 12$ illetve tetszőleges prímhatvány.*

4. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m^+$ illetve $\mathbb{Z}_m^\times$ csoportok elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.*

5. *Legyenek a, n, m pozitív egészek, és $d = (a^n - 1, a^m - 1)$. Mutassuk meg, hogy $o_d(a) \mid n$, és hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.*

6. *Legyen G csoport és $g \in G$. Igazoljuk az alábbiakat.*

a) $|g^k| = |g|/(|g|, k)$.

b) Ha G elemszáma véges, és legalább 2, akkor G-ben van prímrendű elem.

c) g akkor és csak akkor hatványa g^k-nak, ha $(|g|, k) = 1$.

További gyakorló feladatok

7. *Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.*

8. *Az alábbi csoportokban határozzuk meg az elemek rendjeit.*

a) Egy olyan rombusz szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.

b) Egy négyzet szimmetriacsoportja.

c) Egy szabályos háromszög szimmetriacsoportja.

d) Egy szabályos tetraéder szimmetriacsoportja.

e) Egy kocka szimmetriacsoportja.

f) Egy kocka mozgáscsoportja (mozgás = irányítástartó egybevágóság).

9. *Legyen G a sík egybevágósági transzformációinak csoportja a kompozícióra, és t_1, t_2 két olyan tengelyes tükrözés, melyek tengelyei α szöget zárnak be. Igazoljuk, hogy t_1t_2 rendje n, ha $\pi/\alpha = n \in \mathbb{Z}$, és végtelen, ha π/α irracionális szám.*

10. *Legyenek m és n pozitív egészek.*

a) Igazoljuk, hogy egy n-edik és egy m-edik egységgyök szorzata nm-edik egységgyök.

b) Mutassuk meg, hogy ha a G kommutatív csoport két elemének rendje relatív prím, akkor szorzatuk rendje a rendek szorzata. Szükséges-e a rendekre adott feltétel?

11. *Igazoljuk, hogy ha $d \mid m$, akkor $\mathbb{Z}_m^+$-ban pontosan $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.*

12. *Igazoljuk, hogy ha $n \geq 3$, akkor a $\mathbb{Z}_{2^n}^\times$ csoportban legalább két másodrendű elem van.*