Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Ötödik alkalom

Ezen a feladatsoron az n határozatlanú, k-adfokú elemi szimmetrikus polinomok jele

$$\sigma_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} x_{i_1}\dots x_{i_k}\,.$$

1. *Mely $b \in \mathbb{C}$ értékekre lesz az $x^n + bx^k + 1$ polinomnak háromszoros gyöke?*

2. *Lehet-e egy irreducibilis polinomnak többszörös gyöke $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{Z}_2$ felett?*

3. *Adjunk meg egy olyan polinomot egy alkalmas test felett, melynek van olyan nyolcszoros u gyöke, hogy u a polinom deriváltjának is (pontosan) nyolcszoros gyöke. Igaz-e tetszőleges test felett, hogy ha egy elem egy polinomnak egyszeres gyöke, akkor a deriváltjának biztosan nem gyöke?*

4. *Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \ge 2$).*

5. *Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a + b, a + c, b + c$.*

További gyakorló feladatok

6. *Legyen f valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy f előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*

7. *Igazoljuk, hogy az $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha $a_1, \dots, a_n$ páronként különböző egész számok.*

8. *Írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a következő összeget:*

$$\sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^2 x_j\,.$$

9*. *Az n-edfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak nincs többszörös gyöke. Lehet-e legalább n-szeres gyöke az $[f']^2 - ff''$ polinomnak?*

Eredmények, ötletek

4. A reciprokösszeg -1, a köbösszeg $n \ge 3$ esetén $3\sigma_3 + \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$, vagyis az eredmény $n = 2$-re 2, $n = 3$-ra és 4-re -3, $n \ge 5$-re 0.

5. $x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ illetve $x^3 + 3x - 1$.

8. $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

9. Ha u gyöke $[f']^2 - ff''$-nek, akkor deriváljuk le az $f'(x)/f(x) - f'(u)/f(u)$ racionális törtfüggvényt.