Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Negyedik alkalom

Egy egész együtthatós polinom *primitív*, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1. Gauss lemmája szerint két primitív polinom szorzata is primitív. Ennek következménye, hogy egy egész együtthatós polinom akkor és csak akkor felbonthatatlan $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans prímszám, vagy primitív, és irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

A Schönemann-Eisenstein irreducibilitási kritérium azt mondja ki, hogy ha f egész együtthatós, nem konstans polinom, és van olyan p prímszám, mely osztja f minden együtthatóját a főegyüttható kivételével (amit nem oszt), és p^2 nem osztja f konstans tagját, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Ha p/q racionális gyöke az $a_n x^n + \cdots + a_0$ egész együtthatós polinomnak, ahol $(p,q)=1$, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$. Ennek alapján eldönthető a másod- és harmadfokú egész együtthatós polinomokról, hogy irreducibilisek-e $\mathbb{Q}$ felett. További ötletek az irreducibilitás eldöntésére:
– f akkor és csak akkor irreducibilis, ha egy eltoltja ($f(x+c)$) az.
– Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.
– Bontsuk fel a polinomot egy nagyobb testben, és használjuk a felbontás egyértelműségét.

1. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben azok a polinomok, amelyeknek a konstans tagja páros, ideált alkotnak, ami nem főideál.*

2. *Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ felett?*

3. *Írjuk fel az összes másodfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett. Melyek lesznek irreducibilisek? Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

4. *Bontsuk $\mathbb{Z}[x]$-ben felbonthatatlanok szorzatára a $30x^3+24$ és $10x^6+15x+6$ polinomokat.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, akkor $1+x+\cdots+x^{p-1}$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

6. *A $6x^4-9x+1$ polinomot modulo 3 vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

További gyakorló feladatok

7. *Bizonyítsuk be az egész együtthatós polinomok racionális gyökeiről szóló fenti állítást.*

8. *Irreducibilis-e $x^4+x^3+x^2+1$ a $\mathbb{Q}$ test felett?*

9. *Legyen $f(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = x^4-10x^2+1$. Mutassuk meg, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, de (*) minden p prímre reducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.*

10. *Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, p egy prímszám, és $0<k<n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*
a) Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.
b) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.
c) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.
d) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.
e) Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ felett k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.
f) Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.