Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Harmadik alkalom

Legyen $d \neq 1$ négyzetmentes egész szám. Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ az $a + b\sqrt{d}$ alakú számok gyűrűjét a szokásos összeadásra és szorzásra nézve, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Ha $d = -1$, akkor a *Gauss-egészek* gyűrűjét kapjuk. A $\mathbb{Z}_m$ a modulo m maradékosztályok gyűrűjét jelöli.

1. *Az alábbi struktúrák közül melyek lesznek gyűrűk, nullosztómentes gyűrűk, testek? Ha kommutatív, nullosztómentes gyűrűt (azaz* integritási tartományt*) kapunk, határozzuk meg benne az egységeket, a prímeket és a felbonthatatlanokat, vizsgáljuk meg, hogy minden irreducibilis elem prím-e, majd döntsük el, érvényes-e a számelmélet alaptétele.*

a) *Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) *Az $a + b\sqrt[3]{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

c) *Az $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve. (Az, hogy testet kapunk-e, nehezebb!)*

d) *A páros (egész) számok a szokásos műveletekre.*

e) *Azok a racionális számok, melyek nevezője relatív prím a hathoz, a szokásos műveletekre.*

f) *Azok a racionális számok, melyek nevezőjében csak a 2 és 3 prímtényezők szerepelnek, a szokásos műveletekre.*

g) *A valós együtthatós polinomok az összeadásra és a „kompozícióra": $f \circ g$ az a polinom, amit úgy kapunk, hogy f-ben a határozatlan helyére g-t írunk.*

2. *Legyen R egységelemes integritási tartomány. Mik az $R[x]$ polinomgyűrű egységei?*

3. *Határozzuk meg az összes egységet a Gauss-egészek gyűrűjében. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben végtelen sok egység van.*

4. *Legyen K test, és jelölje $K^\circ[x]$ az olyan K feletti „polinomoknak" a gyűrűjét, amelyben az x kitevőjeként nemcsak nemnegatív egészek, hanem tetszőleges nemnegatív racionális számok szerepelhetnek (de minden polinomnak továbbra is véges sok tagja van). Igazoljuk, hogy nullosztómentes gyűrűt kaptunk, amiben minden irreducibilis elem prím, de nem érvényes az alaptétel. Létezik-e felbonthatatlan elem $\mathbb{C}^\circ[x]$-ben? És $\mathbb{Q}^\circ[x]$-ben?*

5. *Határozzuk meg az $x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_8[x]$ polinom gyökeit $\mathbb{Z}_8$-ban. Van-e ennek a polinomnak gyöktényzős alakja? Egyértelmű-e ez?*

6. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gyűrűben nem érvényes a számelmélet alaptétele.*

Gyakorló feladatok

7. *Legyen R integritási tartomány. Mutassuk meg az alábbiakat.*

a) *Ha létezik $e \in R$, ami osztja R minden elemét, akkor R egységelemes.*

b) *Ha R-ben van prímtulajdonságú elem, akkor R egységelemes.*

c) *Minden prímtulajdonságú elem felbonthatatlan.*

d) *R két eleme akkor és csak akkor asszociált, ha egymásnak egységszeresei.*

8. *Mutassuk meg, hogy a maradékosztályok közötti műveletek jóldefiniáltak, azaz az eredmény nem függ attól, hogyan választjuk ki azokat a reprezentánselemeket a maradékosztályokból, amikkel a műveleteket végezzük.*