Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Második alkalom

1. *Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$. Oldjuk meg az $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ egyenletet.*

2. *Adjuk meg az $x^4+1=0$ egyenlet összes komplex gyökét.*

3. *Számítsuk ki az n-edik komplex egységgyökök összegét és szorzatát.*

4. *Bizonyítsuk be, hogy $x^n-1=(x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_n)$, ahol $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ az n-edik egységgyökök. Határozzuk meg ennek alapján az egységsugarú körbe írt szabályos sokszög egy rögzített csúcsától a többi csúcshoz vezető szakaszok hosszának szorzatát.*

5. *Fejezzük ki az ötödik egységgyököket racionális számokból és az i-ből kiindulva, a négy alapművelet és négyzetgyökvonás segítségével.*

6. *Legyen ε egy n-edik egységgyök. Számítsuk ki a*

$$\sum_{j=1}^{n} j\varepsilon^{j-1}$$

összeget.

7.** *Igazoljuk, hogy $2n-1$ egész szám között mindig kiválasztható n, melyek összege osztható n-nel.*

Megoldás az I/8. feladatra. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, $\varepsilon=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$, $\eta=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$. A szabályos hatszög felrajzolásából látjuk, hogy $\eta=1+\varepsilon$. Ha X jelöli az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög középpontját, akkor az $\overrightarrow{XB}$ vektort 120 fokkal elforgatva az $\overrightarrow{YB}$ adódik, azaz $(B-X)\varepsilon=A-X$, ahonnan

$$X=\frac{A-B\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad \text{és hasonlóan}\quad Y=\frac{B-C\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad Z=\frac{C-A\varepsilon}{1-\varepsilon}\,.$$

Azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{XY}$ vektort 60°-kal elforgatva az $\overrightarrow{XZ}$-t kapjuk, azaz $(Y-X)\eta=(Z-X)$. A fentieket behelyettesítve és $1-\varepsilon$-nal szorozva:

$$((B-C\varepsilon)-(A-B\varepsilon))\,\eta=(C-A\varepsilon)-(A-B\varepsilon)\,.$$

Beírva, hogy $\eta=1+\varepsilon$, és átrendezve

$$A((-1-\varepsilon+\varepsilon+1)+B(1+\varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)-\varepsilon)+C(-\varepsilon(1+\varepsilon)-1)=0\,.$$

Ez pedig teljesül, mert $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ (mint a hatszögről leolvasható), és így A, B és C együtthatója is nulla.