Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Tizedik alkalom

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója, azaz a rendszerben található maximális független részrendszerek elemszáma. Egy lineáris leképezés rangja a képterének a dimenziója, ez megegyezik tetszőleges bázispárban felírt mátrixában az oszlopok (illetve a sorok) által alkotott vektorrendszer rangjával.

Ha V vektortér egy T test felett, akkor a V duális tere $V^* = \mathrm{Hom}(V,T)$. Ha adott V-ben egy e_i $(i \in I)$ bázis, akkor legyen $e_i^* \in V^*$ az a leképezés, ami e_i-t 1-be (a T egységelemébe) viszi, a többi e_j-t pedig nullába. Ha I véges, akkor e_i^* $(i \in I)$ maga is bázis lesz V^*-ban (ez a duális bázis), de általában nem. Az $e_i \to e_i^*$ leképezés az előírhatósági tétel miatt egyértelműen kiterjeszthető egy $V \to V^*$ lineáris leképezéssé, amelynél tehát egy $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in V$ elem képe az a v^* leképezés, amely a $w = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$ vektort a $\sum_{i\in I} \lambda_i \mu_i$ skalárba viszi.

A $\mathrm{Hom}(T,V)$ vektortér végtelen dimenziós V esetén is izomorf V-vel. A megfeleltetést az a $v \mapsto \tilde v$ leképezés adja, amelyre $\tilde v(\lambda) = \lambda v$. Végül $v \in V$ esetén jelölje $\hat v \in (V^*)^*$ azt az elemet, melyre tetszőleges $f \in V^*$ esetén $\hat v(f) = f(v)$. Ekkor a $v \mapsto \hat v$ leképezés lineáris, injektív, véges dimenziós V esetén izomorfizmus, de általában nem.

Diádnak nevezünk egy olyan $n \times m$-es mátrixot, ami egy n magas oszlopvektor és egy m hosszú sorvektor szorzata. A nem nulla diádok pontosan az 1 rangú mátrixok. Minden r rangú $n \times m$-es mátrix előáll r diád összegeként, de kevesebb diád összegeként nem. Egy $A : U \to V$ lineáris leképezés rangja pontosan akkor 1, ha van olyan nem nulla $u \in U$ és $v \in V$, hogy $A = \tilde v u^*$ (és ezért A mátrixa diád).

1. *Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját $\mathbb{R}$ felett.*
a) *Az alábbi mátrixok oszlopai. A mátrixokat bontsuk is fel rangszámnyi diád összegére.*

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) *Az alábbi polinomrendszerek.*

$$\{1+x, 1+2x, 1+3x\} \qquad \{x, 2x, x^2, x^3\} \qquad \{x^2+2x+2, 2x^2-3x+6, 3x^2-8x+10\}$$

2. *Igazoljuk, hogy ha A és B összeadható lineáris leképzések, akkor $r(A+B) \le r(A)+r(B)$. Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.*

3. *Legyen $e_1, \ldots, e_n$ bázis a V vektortérben, $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ és $w = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$.*
a) *Számítsuk ki $e_i^*(v)$, $v^*(e_i)$ és $v^*(w)$ értékét.*
b) *Írjuk fel a $v^*\tilde w$ és a $\tilde w v^*$ leképezések mátrixát alkalmasan választott bázispárban.*

4. *Írjuk fel az origó körüli forgatások és az $y = x$ egyenesre való tükrözés mátrixát az alábbi bázisokban, a bázistranszformáció képletének felhasználásával.*

$$\{(1,0),(0,2)\}, \quad \{(2,0),(0,1)\}, \quad \{(2,0),(0,2)\}, \quad \{(-1,0),(0,1)\},$$
$$\{(1,0),(0,-1)\}, \quad \{(1,1),(1,-1)\}, \quad \{(1,0),(1,1)\}, \quad \{(0,1),(1,0)\}.$$

Folytatás a következő lapon!

5. *Bontsuk fel a síkon a forgatásokat és az egyenesekre való tükrözéseket két-két diád összegére.*

Gyakorló feladatok

6. *Adott n esetén legyen I az $n \times n$-es egységmátrix, $E_{i,j}$ az a mátrix, amelyben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi 0, B_j az az n hosszú sorvektor, melyben a j-edik elem 1, a többi 0, és D_i az az n magas oszlopvektor, amelyben az i-edik elem 1, a többi nulla. Legyen továbbá M tetszőleges $n \times n$-es mátrix, és λ tetszőleges skalár. Szorozzuk meg az M mátrixot balról is és jobbról is az $E_{i,j}$, B_j, D_i, I, $C_{i,j}(\lambda) = I + \lambda E_{i,j}$, $B_i + \lambda B_j$, $D_i + \lambda D_j$ mátrixok közül azokkal, amelyekkel lehet. Bontsuk fel ezeket a mátrixokat diádok összegére.*

7. *Legyen A lineáris leképezés. Igazoljuk az alábbiakat (a leképezéseket balról írjuk).*
- a) *Van olyan B lineáris leképezés, hogy $ABA = A$ és $BAB = B$.*
- b) *Ha A szürjektív, akkor B jobbinverze, ha A injektív, akkor B balinverze A-nak.*
- c) $(AX = AY \implies X = Y) \iff A$ *injektív* $\iff A$ *balinvertálható.*
- d) $(XA = YA \implies X = Y) \iff A$ *szürjektív* $\iff A$ *jobbinvertálható.*

8. *Legyenek A és B olyan lineáris leképezések, melyekre létezik AB. Igazoljuk, hogy*
- a) $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$*;*
- b) *ha AB injektív (illetve szürjektív), akkor B (illetve A) is az;*
- c) *ha A és B is injektív (szürjektív, bijektív), akkor AB is az;*
- d) $r(AB) = r(B) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B)) \geq r(A) + r(B) - \dim(V)$. *Vezessük le ebből, hogy $\tilde{v}u^*$ csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla.*

9. *Legyen $A : U \to V$ lineáris leképezés, $u_1, \ldots, u_k$ bázis U-ban, $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben. Írjuk fel a megfelelő bázispárokban az $A \circ \tilde{u}_i$, $v_j^* \circ A$, $v_j^* \circ A \circ \tilde{u}_i$ leképezések mátrixát.*

10. *Legyen $u_1, \ldots, u_n$ bázis az U vektortérben, $v_1, \ldots, v_n$ bázis a V vektortérben. Legyen továbbá $A : U \to V$ az a lineáris leképezés, melyre $A(u_i) = v_i$ minden i-re, és $B : V^* \to U^*$ az a leképezés, amelyre tetszőleges $f \in V^*$ esetén $B(f) = f \circ A$. Mi lesz B mátrixa a $((v_1^*, \ldots, v_n^*), (u_1^*, \ldots, u_n^*))$ bázispárban?*

11. *Igazoljuk a bevezetőbeli állításokat.*

12. *Mely lineáris leképezések azok, melyek magja maximális altér?*

13. *Legyenek V, W ugyanazon test feletti vektorterek, és $v \in V$ egy rögzített vektor. Jelölje $\mathcal{X}$ azt a lineáris leképezést $\mathrm{Hom}(V, W)$-ből W-be, ami az A leképezéshez $A(v)$-t rendeli. Határozzuk meg $\mathcal{X}$ rangját.*

14. *Mutassuk meg, hogy ha V végtelen dimenziós vektortér, akkor minden r racionális számhoz megadható V-ben egy V_r altér úgy, hogy $r < s \in \mathbb{Q}$ esetén $V_r \subsetneq V_s$.*

15*. *Mutassuk meg, hogy egy végtelen test feletti vektortér nem áll elő véges sok valódi alterének uniójaként.*

16*. *Legyen U vektortér T felett, és $A, A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Hom}(U, T)$. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor függ $A_1, \ldots, A_k$-tól, ha minden $u \in U$-ra $A(u)$ függ $A_1(u), \ldots, A_k(u)$-tól.*