Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Első alkalom

1. *Határozzuk meg* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ *és* $\sqrt[3]{5+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{-2}}$ *értékét.*

2. *Számítsuk ki* $(1+i)/(1-i)$ *értékét,* $1+i$ *trigonometrikus alakját és abszolút értékét.*

3. *Számítsuk ki* $(1+i)^{1991}$ *értékét. Mivel egyenlő* $1+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\dots$ *?*

4. *Hol a hiba a következő levezetésben?*

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$$

5. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et. (Ötlet: a binomiális tétel segítségével számítsuk ki* $\cos x+i\sin x$ *hetedik hatványát.)*

6. *Rajzoljuk le az alábbi halmazokat a komplex számsíkon.*

$$\{z\in\mathbb{C}:|z|=iz\}\,,\qquad \{z\in\mathbb{C}:|z-i-1|=|z+2|\}\,,\qquad \{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{z}=\overline{z}\}$$

$$\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1}=0\}\,,\qquad \{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\frac{z-1}{z+1}=0\}$$

7. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok.*

a) *Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját.*

b) *Írjuk fel annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

8. *Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*

9. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*

10*. *Hozzuk zárt alakra (komplex számok felhasználásával) a* $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ *összeget.*

11*. *Tekintsük az*

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad ad-bc\neq 0,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}$$

leképezést a komplex síkon. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor képzi a $\{z:|z|<1\}$ *halmazt (az egységkör belsejét) önmagára, ha a következő alakban írható:*

$$f(z)=k\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\qquad |k|=1,\quad |\alpha|<1,\quad k,\alpha\in\mathbb{C}.$$

12.** *Adott a síkon véges sok pont úgy, hogy bármely kettő összekötő egyenesén még van egy harmadik pont ezek közül. Igazoljuk, hogy az összes pont egy egyenesen van.*

13. *A metróállomásról 10 percenként indul szerelvény északra is, délre is. Paganel, a szórakozott földrajztudós minden reggel véletlen időpontban érkezik, és abba a szerelvénybe száll be, amelyik előbb jön. Mégis azt tapasztalja, hogy az esetek 9/10-ed részében délre utazott. Hogyan lehetséges ez?*