Matematikus szak, első évfolyam, második félév

Második zárthelyi — megoldások

1. A kapott kétismeretlenes egyenletrendszer két egyenlete $y^2z+yz^2=0$ és $y^2+z^2+yz=1$, az egyismeretlenes egyenlet pedig $z^2(z^2-1)^2=0$. Innen visszafelé haladva hat megoldást kapunk, azokat az (x,y,z) hármasokat, melyekre $\{x,y,z\}=\{-1,0,1\}$.

2. Nem. Mivel $T^2=I$, tetszőleges v vektorra $\langle v, Tv\rangle$ egy T-invariáns altér, azaz részmodulus. Ez tehát a v által generált részmodulus, ami legfeljebb kétdimenziós, és így nem lehet az egész.

3. A szokásos eljárással kapjuk a polinommátrix normálalakját és a Jordan-alakot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-i)^2(x+i) \end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

4. A kvadratikus alak mátrixa és egy megfelelő bázis:

$$\begin{pmatrix} 71 & 18 & 54 \\ 18 & 86 & -36 \\ 54 & -36 & -10 \end{pmatrix} \qquad b_1=\begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} \qquad b_2=\begin{pmatrix} 2/7 \\ -6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} \qquad b_3=\begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

Ezek sajátvektorok rendre 98, 98, -49 sajátértékkel, a kvadratikus alak tehát indefinit. A b_3 lényegében egyértelműen meghatározott, a b_2-t például a Schmidt-féle eljárással lehet megtalálni.

5. Igen, eldönthető. Ha a transzformáció normális, akkor diagonalizálható, és ezért a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres. Ha még unitér is, akkor ezek a gyökök mindegyike 1 abszolút értékű. Megfordítva, ha a minimálpolinom minden gyöke egyszeres, akkor a transzformáció diagonalizálható. A megfelelő bázisból készítve a skalárszorzatot ez a bázis ortonormált lesz, és ezért a transzformáció normális. Ha a sajátértékek mind 1 hosszúak, akkor pedig unitér is, hiszen egy ONB-t ONB-be visz.

6. Igaz. Két transzformáció akkor és csak akkor hasonló, ha a Jordan-alakjuk (lényegében) megegyezik. Az állítást elég egyetlen Jordan-blokkra bizonyítani. Vegyük észre, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor áll egyetlen Jordan-blokkból, ha bármely két sajátvektora párhuzamos. Ez az inverzre is igaz, és mivel az inverz sajátvektorai ugyanazok, mint az eredeti transzformáció sajátvektorai, ezért az inverz is egyetlen Jordan-blokkból áll. Mivel az inverzhez tartozó sajátérték az eredeti sajátérték reciproka, azaz 1, ez a Jordan-blokk azonos az eredetivel.— Ötlet **második megoldás**hoz: egy $n\times n$-es mátrix akkor és csak akkor áll egyetlen Jordan-blokkból, ha $\lambda I+N$ alakú, ahol $N^n=0$ de $N^{n-1}\neq 0$.