Matematikus szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldások

1. A diádokat kiszámítva és összeadva a következő mátrixot kapjuk (a szokásos bázisban):

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2 pont). A rang 2 (Gauss-eliminációval, vagy a diádfelbontásról szóló tételből, 1 pont), a karakterisztikus polinom $-x^3+3x^2+54x$, így a sajátértékek $0, 9, -6$ (2 pont), a megfelelő sajátaltereket pedig rendre az $5x^2-8x+1$, x^2+2x+2, $x^2+2x-13$ generálja (3 pont).

2. Ha $v=(a,b,c)^T$, akkor $Mv=(a+b,b,0)^T$, és $M^2v=(a+2b,b,0)^T$. Ha $c\neq 0$ és $b\neq 0$, akkor e három vektorból álló rendszer rangja három, azaz ilyenkor v nem lehet benne valódi invariáns altérben. Ezért ha W valódi invariáns altér, akkor W része a $c=0$ egyenlettel definiált W_1, vagy a $b=0$ egyenlettel definiált W_2 altérnek.

Ha $c=0$ de $b\neq 0$, akkor v és Mv függetlenek, és ezért generálják W_1-et. Ha tehát W valódi invariáns altere W_1-nek, akkor W része a $c=0$, $b=0$ egyenletekkel definiált W_3 altérnek. Ez már egydimenziós, tehát $W=W_3$ vagy $W=0$.

Ha $b=0$, de a és c egyike sem nulla, akkor v és Mv függetlenek, és ezért generálják W_2-t. Ha tehát W valódi invariáns altere W_2-nek, akkor W része vagy a $b=0$, $a=0$ egyenletekkel definiált W_4 altérnek, vagy pedig W_3-nak. Ezek már egydimenziósak, tehát $W=W_3$, vagy $W=W_4$, vagy $W=0$.

Mivel W_1, W_2, W_3, W_4 nyilván invariáns, a triviálisakkal együtt hat invariáns altér van.

3. A páratlanokra. Tekintsük azt az n-edrendű determinánst, amelynek a főátlójában minden elem nulla, azon kívül minden elem 1. A definíció alapján kifejtve a páros illetve páratlan fixpontmentes permutációk számának különbségét kapjuk. Másfelől viszont ha az első sorból kivonjuk a másodikat, a másodikból a harmadikat, és így tovább, majd az utolsó sorhoz hozzáadjuk az első sort, a második sor kétszeresét, a harmadik sor háromszorosát, és így tovább, akkor felső háromszögmátrixot kapunk, aminek a determinánsa $(-1)^{n-1}(n-1)$.

4. Nem. Ellenpélda: $[A]=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $[B]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A\otimes \mathbb{Z}_{5^\infty}=0$, mert $a\otimes b=a/5^k\otimes 5^k b$, itt $a/5^k\in A$, és $5^k b=0$, ha k elég nagy. Belátjuk, hogy $A\otimes \mathbb{Z}_{3^\infty}\cong \mathbb{Z}_{3^\infty}$, és $\varphi : b\mapsto 1\otimes b$ izomorfizmus. Mivel a $\mathbb{Z}_{3^\infty}$ csoportban $(q,3)=1$ esetén a q-val való osztás egyértelmű, $b\in \mathbb{Z}_{3^\infty}$ és $p/q\in A$ esetén értelmezhető $(p/q)b$ (mint pb q-adrésze). Ezért $\sum n_i\,(p_i/q_i)\otimes b_i = 1\otimes (\sum (n_i p_i/q_i) b_i) = 1\otimes b$, ahol $b\in \mathbb{Z}_{3^\infty}$. Vagyis φ szürjektív. Tekintsük az $f(p/q,b)=(p/q)b$ bihomomorfizmust. Ez átvezethető a tenzorszorzaton, és mivel $1\otimes b$ képe $1b=b$ lesz, φ injektív.

6. Van. Legyen $M=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Ez az összeadásra részcsoport $\mathbb{R}[x]$-ben. Definiáljuk a $p(x)\circ(ax+b)$ modulusszorzatot úgy, hogy ezt a két polinomot összeszorozzuk, majd kidobjuk belőle azokat a tagokat, amelyekben x^2 legalább a másodikon szerepel. Könnyű ellenőrizni, hogy így unitér modulust kaptunk. Legyen $\varphi(m)=x\circ m$. Ez nyilván nem nulla modulushomomorfizmus. De $(\varphi\otimes\varphi)(m\otimes n)=(x\circ m)\otimes(x\circ n)=(x^2\circ m)\otimes n=0$.