Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi

Minden feladatot külön lapra írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakvezér neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Legyen V a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ felett. Határozzuk meg*

$$(x^2+1)(3x^2+2x+1)^* + (2x+1)(x^2+x+3)^* + (2x+4)(2x^2+x-2)^*$$

rangját és sajátaltereit (a bázis a szokásos).

2. *Határozzuk meg az alábbi M mátrix invariáns altereit $\mathbb{R}$ felett.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Mely $n > 0$ egészekre van S_n fixpontmentes elemei között több páros, mint páratlan?*

4. *Tegyük fel, hogy az A és B egy véges dimenziós téren ható lineáris transzformációk, melyekre $ABA = A$ és $BAB = B$. Következik-e ebből, hogy A és B nem nulla sajátértékei egymás reciprokai?*

5. *Legyen A azoknak a törteknek a csoportja az összeadásra, melyek nevezője relatív prím a hathoz. Számítsuk ki az $A \otimes \mathbb{Z}_{3^\infty}$ és az $A \otimes \mathbb{Z}_{5^\infty}$ csoportokat.*

6. *Van-e olyan M baloldali unitér $\mathbb{R}[x]$-modulus, és $\varphi : M \to M$ nem nulla modulus-homomorfizmus, melyre φ önmagával vett tenzorszorzata (mint $\mathrm{Hom}(M \otimes M, M \otimes M)$ eleme) nulla?*