Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Nyolcadik alkalom

1. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi egyenletrendszereket egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket $\mathbb{R}$ felett.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2+(x+1)\cdot y-2=0 \\ (x-1)\cdot y^2+\qquad x\cdot y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2+(x+1)\cdot y-1=0 \\ (x-1)\cdot y^2+\qquad x\cdot y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}$$

2. *Legyen az U vektortér bázisa $\{u_1,u_2,u_3\}$, a V vektortéré $\{v_1,v_2\}$ valós felett. Legyen $A\in\mathrm{Hom}(U,V)$, $S\in\mathrm{Hom}(U)$ és $T\in\mathrm{Hom}(V)$ az alábbi mátrixokkal adva a megfelelő bázisokban.*

$$[A]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad [S]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [T]=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Legyen továbbá $B: U\times V\to\mathbb{R}$ egy olyan bilineáris függvény, melynek mátrixa az adott bázisban ugyanaz, mint A mátrixa. Tekintsük most az $\{Su_1,Su_2,Su_3\}$ illetve a $\{Tv_1,Tv_2\}$ új bázisokat. Adjuk meg A, B, S, T mátrixát az új bázisban közvetlen számolással.

3. *Tekintsük a $-x^2+10xy-y^2-z^2$ és a $-3x\overline{x}+4ix\overline{y}-4i\overline{x}y+3y\overline{y}-z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett.*

a) *Írjuk fel ezek mátrixát.*
b) *Transzformáljuk őket négyzetösszeggé a Schmidt-féle eljárással.*
c) *Határozzuk meg kvadratikus karakterüket.*

4. *Legyen Q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1,\ldots,e_n$ egy Q-ortogonális bázis, és*

$$U=\langle e_i \mid Q(e_i)>0\rangle\,,$$
$$V=\langle e_i \mid Q(e_i)\geq 0\rangle\,,$$
$$W=\langle e_i \mid Q(e_i)=0\rangle\,.$$

E három altér közül melyek függetlenek az $e_1,\ldots,e_n$ bázistól?

5. *Mutassuk meg, hogy ha Q kvadratikus alak egy véges dimenziós, $\mathbb{R}$ feletti vektortéren, és $x\neq 0$ esetén $Q(x)\neq 0$, akkor Q definit. Igaz-e az állítás $\mathbb{Q}$ felett? És $\mathbb{C}$ felett?*

6. *Igaz-e, hogy a kvadratikus alakok vektorterében a pozitív definit alakok halmaza zárt az összeadásra? És a pozitív szemidefiniteké? Hát az indefiniteké?*

7. *Igaz-e, hogy minden kvadratikus alak előáll két pozitív definit kvadratikus alak különbségeként?*

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti vektortéren értelmezett bilineáris függvény egyértelműen felírható $A+Bi$ alakban, ahol A és B Hermitikus.*