Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév
Hetedik alkalom

1. *Milyen ismert gyűrűkkel izomorfak az alábbi faktorok?*
a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($4\mathbb{Z}$ a néggyel osztható számok halmaza).
b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$.
c) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.
d) $\mathbb{R}[x]/(x^2+4)$.
e) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$.

2. *Írjuk fel a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrű műveletábláit, és igazoljuk, hogy négyelemű testet kaptunk. Konstruáljunk hasonló módszerrel egy nyolcelemű testet. Izomorfia erejéig hányféle testet kapunk így?*

3. *Jelölje $\mathbb{G}$ a Gauss-egészek gyűrűjét.*
a) Test-e a $\mathbb{G}/(3)$ faktorgyűrű?
b) Hány eleme van a $\mathbb{G}/(3)$ faktorgyűrűnek?
c) Van-e $\mathbb{G}$-nek a háromelemű testtel izomorf faktorgyűrűje?

4. *Legyen R egységelemes gyűrű és M baloldali unitér R-modulus, mely egy elemmel generálható (azaz ciklikus).*
a) Mutassuk meg, hogy M izomorf R-nek mint önmaga feletti modulusnak egy J részmodulusa, azaz balideálja szerinti faktormodulusával.
b) Adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést M faktormodulusai, és R-nek a J-t tartalmazó balideáljai között.

5. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mutassuk meg, hogy az $M = \mathbb{R}^3$ a $pv = p(A)v$ definícióval $\mathbb{R}[x]$-modulus.
b) Igazoljuk, hogy u generálja M-et (azaz M ciklikus).
c) Mutassuk meg, hogy az A-invariáns alterek éppen a részmodulusok.
d) Igazoljuk, hogy M izomorf $\mathbb{R}[x]$-nek (mint önmaga feletti modulusnak) az $x(x-1)^2$ polinom által generált ideál szerinti faktormodulusával.
e) Igazoljuk, hogy M faktormodulusai, és így részmodulusai is éppen $x(x-1)^2$ osztóinak felelnek meg, és számítsuk is ki az összes részmodulust.

További feladatok

6. *A faktorgyűrű fogalmának felhasználásával bizonyítsuk be a Schönemann-Eisenstein tételt minden alaptételes gyűrű felett.*

7. *Mutassuk meg, hogy ha p prímszám, akkor létezik akármilyen nagy elemszámú, véges, p-karakterisztikájú test. Létezik-e végtelen elemszámú, p karakterisztikájú test?*

8*. *Legyen n pozitív egész, és R egy végtelen integritási tartomány, melyben az $x \mapsto x^n$ leképezés endomorfizmus. Mutassuk meg, hogy n prímhatvány.*

9*. *Legyen D főideálgyűrű. Generálható-e a $D[x,y]$ gyűrű (x^2, xy, y^2) ideálja két elemmel?*