Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hatodik alkalom

1. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák?*

a) *A valós együtthatós polinomok az összeadásra nézve* $\mathbb{Q}$ *felett a* $q \circ p(x) = qp(1)$ *(mint konstans polinom) szorzással.*

b) *A* $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *Abel-csoport az* $\mathbb{R}$ *gyűrű felett az* $r \circ (a, b) = (ra, rb)$ *szorzással.*

c) *Az előbbi* G *az* $\mathbb{R}$ *felett az* $r \circ (a, b) = (ra, 0)$ *szorzással.*

d) *Az előbbi* G *az* $\mathbb{R}$ *felett az* $r \circ (a, b) = (ra + rb, ra - rb)$ *szorzással.*

e) *Az előbbi* G *a* $\mathbb{C}$ *felett az* $(r + is) \circ (a, b) = (ra, sb)$ *szorzással.*

f) *Az előbbi* G *a* $\mathbb{C}$ *felett az* $(r + is) \circ (a, b) = (ra - sb, rb + sa)$ *szorzással.*

g) *Tetszőleges* A *Abel-csoport* $\mathbb{Z}$ *felett, ahol* $n \circ a = na$ *jelentése a szokásos.*

h) *Ha* S *részgyűrűje* R*-nek, akkor* R *az* S *felett, ahol az összeadás az* R*-beli összeadás, és* $s \circ r = sr$ *(*R*-beli szorzás).*

i) *Ha* S *balideálja* R*-nek, akkor* S *az* R *felett, ahol az összeadás az* S*-beli összeadás, és* $r \circ s = rs$ *(*R*-beli szorzás).*

j) *Egy halmaz összes részhalmaza a kételemű test felett, az összeadás a szimmetrikus differencia képzése,* $0 \circ H = \emptyset$, $1 \circ H = H$.

2. *Legyen* M *az* R *gyűrű, mint az* S *részgyűrűje feletti modulus, ahol az összeadás az* R*-beli összeadás, és* $s \circ r = sr$ *(*R*-beli szorzás). Modulus-homomorfizmusok-e az alábbi függvények?*

a) $\varphi : M \to M$; $\varphi(r) = tr$ *(*$t \in R$ *rögzített).*

b) $\varphi : M \to M$; $\varphi(r) = rt$ *(*$t \in R$ *rögzített).*

3. *Tegyük* $\mathbb{R}$ *additív csoportját modulussá* $\mathbb{R}[x]$ *felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása* $p(x) \circ r = p(1)r$, *a másodiké* $p(x) \circ r = p(2)r$. *Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

4. *Legyen* V *egy* n*-dimenziós vektortér, és* $R = \mathrm{Hom}(V)$. *Tegyük* V*-t* R*-modulussá az* $A \circ v = A(v)$ *szorzással. Mik lesznek a kapott modulus részmodulusai?*

5. *Legyen* R *kommutatív egységelemes gyűrű és* A, B, C, D *baloldali unitér* R*-modulusok. Melyek igazak az alábbi izomorfizmusok közül?*

a) ${}_R R \otimes A \cong A$.

b) $\mathrm{Hom}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$.

c) $\mathrm{Hom}(A, C \times D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(A, D)$.

d) $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$.

e) $(A \times B) \otimes C \cong (A \otimes C) \times (B \otimes C)$.

f) $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$.

6. *Legyen* R *kommutatív egységelemes gyűrű,* $A \le B$ *és* $C \le D$ *baloldali unitér* R*-modulusok. Jelölje* U *az* $a \otimes c$ *alakú elemek által generált részcsoportot* $B \otimes D$*-ben, ahol* a *befutja* A*-t és* c *befutja* C*-t.*

a) *Mutassuk meg, hogy* U *homomorf képe* $A \otimes C$*-nek.*

b) *Igaz-e, hogy* $B/A \otimes D/C \cong (B \otimes D)/U$*?*

c) *Igaz-e, hogy* U *és* $A \otimes C$ *izomorfak?*

d) *Igaz-e, hogy* U *és* $A \otimes C$ *izomorfak, ha* R *test?*