Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Ötödik alkalom

Egy Abel-csoport
— *redukált,* ha a nullán kívül nincs osztható részcsoportja;
— *torziócsoport,* ha minden eleme véges rendű;
— *torziómentes,* ha csak egy véges rendű eleme van;
— *szabad,* ha $\mathbb{Z}^+$ néhány példányának direkt összegével izomorf.
Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor nA az A elemeinek n-szereseiből álló részcsoport. A D Abel-csoport *injektív,* ha bármely $B \leq A$ Abel-csoportok esetén A tetszőleges D-be való homomorfizmusa kiterjeszthető B-re.

1. *Számítsuk ki az alábbi faktorok művelettábláit. Milyen ismert csoportot kapunk?*
a) $\mathbb{Z}^+/4\mathbb{Z}^+$.
b) $A/21A$, *ahol* $A = \mathbb{Z}^+_{60} \times \mathbb{Z}^+_{24}$. *Mi lesz a* $(11, 11) + 21A$ *elem rendje?*

2. *Számítsuk ki az alábbi Abel-csoportokat.*
a) $\mathbb{Z}^+_n \otimes \mathbb{Z}^+$.
b) $\mathbb{Z}^+_n \otimes \mathbb{Z}^+_m$.
c) $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Z}^+_n$.
d) $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Q}^+$.
e) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}^+_n$.
f) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

3. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*
a) *Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.*
b) *Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.*
c) *Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.*
d) *Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.*
e) *Ha A tetszőleges Abel-csoport, akkor* $\mathbb{Z}^+_n \otimes A \cong A/nA$.

4. *Számítsuk ki* $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+_m, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ *esetén* $\mathrm{Hom}(A, \varphi)$*-t,* $\mathrm{Hom}(\varphi, A)$*-t és* $A \otimes \varphi$*-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze φ és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*
a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az n-szeresét rendeli.*
b) $\varphi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$, *az n-nel szorzás.*
c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ *a mod n vett maradék képzése.*
d) φ *a* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *beágyazás.*

5. *Legyenek A, B, C, D Abel-csoportok.*
a) *Mutassuk meg, hogy van egy* $\psi : \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D) \to \mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D)$ *természetes homomorfizmus.*
b) *Legyen* $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2}$ *az a leképezés, amire* $\varphi(1) = p$. *Számítsuk ki $\varphi \otimes \varphi$-t a két lehetséges értelmezés szerint.*
c) *Igazoljuk, hogy ψ általában se nem injektív, se nem szürjektív.*

6****.** *Mutassuk meg, hogy egy Abel-csoport akkor és csak akkor osztható, ha injektív. Mutassuk meg, hogy minden Abel-csoport előáll egy osztható csoportnak és egy redukált csoportnak a direkt összegeként.*

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX