Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Negyedik alkalom

Ha A és B Abel-csoportok, akkor $\operatorname{Hom}(A, B)$ jelöli az A-ból B-be menő csoporthomomorfizmusok csoportját a pontonkénti összeadásra. Az A Abel-csoportot *osztható csoportnak* nevezzük, ha minden n egészhez és minden $g \in A$-hoz van olyan $h \in A$, hogy $hn = g$.

1. *Határozzuk meg az alábbi A lineáris transzformációk illetve mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeiket, sajátaltereiket és invariáns altereiket.*

a) A az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) V a sík $\mathbb{R}$ felett, A pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

c) V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).

2. *Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

3. *Milyen kapcsolatban állnak egy A mátrix karakterisztikus polinomjának együtthatói A nyomával illetve determinánsával? Igazoljuk a Cayley-Hamilton-tételt kétszer kettes mátrixokra. Oldjuk meg az $X^2 = -E$ és az $X^2 = 0$ egyenleteket $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben.*

4. *Határozzuk meg az alábbi* Hom*-csoportokat. A p-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportját $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jelöli (p adott prím), $n, m > 0$ egészek, A tetszőleges Abel-csoport.* $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+)$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}^+)$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^+, A)$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}^+)$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_n^+)$.

További feladatok

5. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá* $\operatorname{Im}(A)$ *és* $\operatorname{Ker}(A)$ *is B-invariáns altér.*

6. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

7. *Van-e olyan $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?*

8. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*

9. *Legyen $A : U \to V$ lineáris leképezés és $A^* : V^* \to U^*$ az a leképezés, amelyre tetszőleges $f \in V^*$ esetén $A^*(f) = f \circ A$ (vö. III/3. feladat).*

a) Ha A mátrixa M az $((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_k))$ bázispárban, mi lesz A^* mátrixa a $((v_1^*, \ldots, v_k^*), (u_1^*, \ldots, u_n^*))$ bázispárban?

b) Mutassuk meg, hogy $\widehat{A(u)} = A^{**}(\hat{u})$. Itt $u \mapsto \hat{u}$ jelöli a szokásos $U \to U^{**}$ és $V \to V^{**}$ beágyazásokat (vö. III/5. feladat).

10.** *Keressünk példákat osztható csoportokra, majd adjunk rájuk struktúratételt. Mutassuk meg, hogy minden Abel-csoport beágyazható osztható csoportba.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX