Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Harmadik alkalom

Legyenek V_i vektorterek (ugyanazon T test felett). Ezek direkt szorzatán azt a $V = \prod V_i$ vektorteret értjük, melynek alaphalmaza a V_i-k alaphalmazainak Descartes-szorzata, és a műveleteket komponensenként végezzük. Ugyanezen vektorterek $\sum V_i$ direkt összegén a V azon elemeiből álló alteret értjük, amelyben véges sok komponens kivételével a megfelelő vektortér nulleleme szerepel.

1. *Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis a V vektortérben, és $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$.*
   a) Számítsuk ki $v_i^*(v)$, $v^*(v_i)$ és $v^*(v)$ értékét.
   b) Írjuk fel a $v^* \circ \tilde{v}$ és a $\tilde{v} \circ v^*$ leképezések mátrixát alkalmasan választott bázispárban.

2. *Legyen $\alpha : U \to V$ lineáris leképezés, $u_1, \dots, u_k$ bázis U-ban, $v_1, \dots, v_n$ bázis V-ben. Írjuk fel a megfelelő bázispárokban az $\alpha \circ \tilde{u}_i$, $v_j^* \circ \alpha$, $v_j^* \circ \alpha \circ \tilde{u}_i$ leképezések mátrixát.*

3. *Legyen $u_1, \dots, u_n$ bázis az U vektortérben, $v_1, \dots, v_n$ bázis a V vektortérben. Legyen továbbá $\alpha : U \to V$ az a lineáris leképezés, melyre $\alpha(u_i) = v_i$ minden i-re, és $\beta : V^* \to U^*$ az a leképezés, amelyre tetszőleges $f \in V^*$ esetén $\beta(f) = f \circ \alpha$. Mi lesz β mátrixa a $((v_1^*, \dots, v_n^*), (u_1^*, \dots, u_n^*))$ bázispárban?*

4. *Mutassuk meg, hogy $(\sum V_i)^* \cong \prod V_i^*$.*

5. *Legyen V vektortér, és $v \in V$. Jelölje $\hat{v} \in (V^*)^*$ azt az elemet, melyre tetszőleges $f \in V^*$ esetén $\hat{v}(f) = f(v)$.*
   a) Mutassuk meg, hogy a $v \mapsto \hat{v}$ leképezés lineáris és injektív.
   b) Mutassuk meg, hogy véges dimenziós V esetén ez a leképezés izomorfizmus, de általában nem.

6. *Mutassuk meg, hogy egy (esetleg végtelen sok egyenletből álló) lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor nem megoldható, ha van véges sok olyan egyenlet, melyek alkalmas lineáris kombinációját elkészítve a baloldal nulla lesz, de a jobboldal nem. Vezessük le ebből a duális térbeli lineáris függést jellemző tételt.*

7. *Legyenek $A : U \to V$ és $B : V \to W$ lineáris leképezések. Mutassuk meg, hogy $r(B \circ A) = r(A) - \dim(\operatorname{Im}(A) \cap \operatorname{Ker}(B)) \geq r(B) + r(A) - \dim(V)$. Vezessük le ebből, hogy $\tilde{u} \circ v^*$ csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla.*

További gyakorló feladatok

8. *Legyen V vektortér, és osztályozzuk $\operatorname{Hom}(V)$ elemeit a következő ekvivalencia-reláció szerint: $A \sim B$ ha van olyan invertálható P és Q, melyre $PAQ = B$. Hány osztályt kapunk?*

9. *Legyen R egységelemes gyűrű.*
   a) Mutassuk meg, hogy ha egy $r \in R$ elemnek csak egy balinverze van, akkor az jobbinverz is.
   b) Mutassuk meg, hogy ha $r \in R$ nilpotens, akkor $1 - r$ invertálható.

10. *Legyen $A, A_1, \dots, A_k \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Mutassuk meg, hogy A akkor és csak akkor függ $A_1, \dots, A_k$-tól, ha minden $u \in U$-ra $A(u)$ függ $A_1(u), \dots, A_k(u)$-tól.*