Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Második alkalom

1. *Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját $\mathbb{R}$ felett.*

a) *Az alábbi mátrixok oszlopai. Keressünk rang méretű nem nulla aldeterminánst is. Amelyik mátrix invertálható, annak keressük meg az inverzét Gauss-eliminációval.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Az alábbi polinomrendszerek.*

$$\{1+x, 1+2x, 1+3x\} \qquad \{x, 2x, x^2, x^3\} \qquad \{x^2+2x+2, 2x^2-3x+6, 3x^2-8x+10\}$$

2. *Legyenek $A : V_1 \to V_2$ és $B : V_1 \to V_2$ lineáris leképzések. Mutassuk meg, hogy $r(A+B) \le r(A) + r(B)$. Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.*

3. *Legyenek V, W ugyanazon test feletti vektorterek, és $v \in V$ egy rögzített vektor. Jelölje $\mathcal{X}$ azt a lineáris leképezést $\mathrm{Hom}(V, W)$-ből W-be, ami az A leképezéshez $A(v)$-t rendeli. Határozzuk meg $\mathcal{X}$ rangját.*

4. *Mutassuk meg, hogy minden A lineáris leképezéshez van olyan B lineáris leképezés, hogy $ABA = A$ és $BAB = B$.*

5. *Legyen K egy q elemű véges test, és $n > 0$ egész. Hány olyan $n \times n$-es mátrix van K felett, melynek a determinánsa nem nulla? Hány van, aminek a determinánsa 1? Hány olyan van, ami ez utóbbiak mindegyikével felcserélhető?*

6. *Adott egy n elemű X halmaznak n részhalmaza úgy, hogy minden pont páros sok halmazban szerepel. Van-e mindig olyan nem üres részhalmaza X-nek, melyet az adott halmazok mindegyike páros sok pontban metsz?*

7. *Az n lélekszámú Páratlanváros önkormányzata az alábbi rendelkezéseket hozta.*

– *A város bármely klubjának páratlan számú tagja kell, hogy legyen.*
– *Bármely két (különböző) klubnak páros sok közös tagja kell, hogy legyen.*
– *Semelyik két (különböző) klubnak sem lehet azonos a tagsága.*

a) *Adjunk minél általánosabb módszert ilyen tulajdonságú klubrendszerek gyártására.*

b) *Igazoljuk, hogy ha n klubot adunk meg így, akkor minden lakos páratlan sok klubnak kell, hogy tagja legyen.*

c) *Mutassuk meg, hogy a klubok száma legfeljebb n.*

8*. *Egy páros gráfot teljesnek nevezünk, ha az alaphalmaz két része között minden lehetséges él be van húzva. Fel lehet-e bontani egy n pontú teljes gráf élhalmazát $n-1$-nél kevesebb teljes páros gráf élhalmazainak diszjunkt uniójára?*

9.** *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-ben nem lehet $(n+1)(n+4)/2$-nél több pontot megadni úgy, hogy ezek egymástól vett távolságai legfeljebb kétfélék legyenek.*