Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Tizenegyedik alkalom

1. *Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) mátrix determinánsosztóit. Döntsük el, van-e ilyen mátrix, és ha igen, akkor adjuk meg a minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.*

a) $\{1, 1, x^2\}$.
b) $\{1, x, x^2, x^3\}$.
c) $\{1, 1, x, x^3\}$.
d) $\{1, 1, x^2, x^3\}$.
e) $\{1, 1, 1, x^3\}$.
f) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x^2(x-1)^2, x^5(x-1)^4\}$.

2. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Legyen M az előző feladatban szereplő harmadik mátrix. Számítsuk ki az M^n sorozat határértékét midőn n tart a végtelenhez.*

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha M komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.*

További (nem feltétlenül gyakorló) feladatok

5. *Igaz-e, hogy tetszőleges nilpotens (idempotens) valós mátrix valós felett Jordan-alakra hozható? Igaz-e, hogy minden kétszer kettes valós mátrix valós felett Jordan-alakra hozható?*

6. *Mi annak a mátrixnak a Jordan-alakja, amelyben a diagonálissal párhuzamos, alatta lévő második ferde vonalban csupa egyesek vannak, azon kívül pedig csupa nullák?*

7. *Igaz-e, hogy minden komplex elemű négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához? (Két mátrix hasonló, ha bázistranszformációval egymásba vihetők.)*

8. *Igazoljuk, hogy végtelen test felett egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomjának foka megegyezik a tér dimenziójával. Hány invariáns altér van ilyenkor?*

9*****.** *Egy kártyacsomagot a következő módon akarunk megkeverni:*

a) *a legfelső lapot legalulra tesszük;*
b) *a legfelső két lapot megcseréljük.*

Fogunk egy húszfillérest, és sokszor feldobjuk. Ha az eredmény írás, akkor az a)-beli, ha pedig fej, akkor a b)-beli mozdulatot hajtjuk végre. Bizonyítsuk be, hogy ha ezt az eljárást elég sokáig csináljuk, akkor a kártyacsomag jól megkeveredik. (Hogyan lehet általánosítani a feladatot? Mi köze van ennek a Jordan-alakhoz? És a csoportokhoz?)