Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Tizedik alkalom

1. *Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációknak és mátrixoknak a minimálpolinomját $\mathbb{R}$ felett: a síkon az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás; az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemein a deriválás;*

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

2. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, melyeknek másodfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?*

3. *Legyen m az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció minimálpolinomja, és $m = fg$, ahol f és g relatív prímek. Bizonyítsuk be, hogy $V = \mathrm{Ker}(f(A)) \oplus \mathrm{Ker}(g(A))$.*

4. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbb{C}$ feletti mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomjának nincsenek többszörös gyökei.*

5. *Az alább megadott M modulusok megadott X generátorrendszeréhez készítsük el az alaptétel bizonyításában használt mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és ennek alapján bontsuk fel M-et ciklikus modulusok direkt összegére.*

a) $M = \mathbb{Z}_6^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{2, 3\}$.

b) $M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

c) $M = \mathbb{C}^n$ *mint a* $\mathbb{C}[x]$ *feletti, az alább megadott mátrixokhoz tartozó szokásos modulus,* X *pedig* $\mathbb{C}^n$ *szokásos bázisa.*

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

További gyakorló feladatok

6. *Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.*

7. *Tekintsük $\mathrm{Hom}(V)$-ben az $\{A^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ ($A^0 = I$) transzformációk által generált alteret. Hány dimenziós ez az altér?*

8. *Igazoljuk, hogy egy racionális elemű négyzetes mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.*

9. *Igazoljuk, hogy tetszőleges A lineáris transzformációra $\mathrm{Ker}(f(A)) = \mathrm{Ker}(g(A))$ akkor és csak akkor, ha $(f, m_A) = (g, m_A)$.*

10. *Legyen A olyan lineáris transzformáció egy páratlan dimenziós, $\mathbb{Q}$ feletti vektortéren, melynek minimálpolinomja másodfokú. Bizonyítsuk be, hogy A-nak van sajátvektora.*