Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Első alkalom

1. *Az* $((a_{ij}))$ *négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele:* $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

2. *Van-e olyan* $123456789 \times 123456789$*-es mátrix, melyben csak a* 0 *és* 1 *számok szerepelnek, s determinánsa* 2?

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* n*-edrendű, komplex elemű determinánsban* a_{ij} *az* a_{ji} *konjugáltja minden* i, j*-re, akkor a determináns értéke valós.*

4. *Igazoljuk, hogy ha egy* $n \times n$*-es mátrixban van egy* $m \times k$*-as téglalap csupa nullákból, és* $m + k > n$*, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

5. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat. Az elsőt mindhárom módszerrel: a permutációs képlet alapján, a kifejtési tétellel, és Gauss-eliminációval.*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6. *Legyen* A *egész számokból álló négyzetes mátrix.*

a) *Igazoljuk, hogy* A^{-1} *akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha* $\det A \in \{1, -1\}$.

b) *Mutassuk meg, hogy ha minden oszlop elemeinek összege osztható* 7*-tel, akkor* $\det A$ *is osztható* 7*-tel.*

c) *Bizonyítsuk be, hogy* $\det A$ *akkor és csak akkor páros, ha kiválasztható néhány sor úgy, hogy ezeket összeadva a kapott vektor csupa páros számot tartalmaz.*

7.** *Legyen* $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$*, és* ε_i *a* $2\pi i/n$ *szöghöz tartozó* n*-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1}) \,.$$

8*. *Legyen* $p > 2$ *prím, és tekintsük az* $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0 \ (p)$ *kongruenciát, ahol* $p \nmid a_0$*. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \ (p) \,.$$

9.** *Bergengóciában, a futball-bajnokság félidejénél azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány csapatot, hogy a bajnokság bármely csapata (a közülük valók is) ezek ellen összesen páros sok pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros (mindenki mindenkivel egyszer játszott, saját maga ellen mindenki nulla pontot szerzett.)*