Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Kilencedik alkalom

1. *Generátorrendszer-e X a V vektortérben, ha*

a) $V = \mathbb{R}^4$ *az* $\mathbb{R}$ *felett és* $X = \{(1,0,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (1,0,0,1)^T, (0,1,1,0)^T\}$.

b) V *a valós számsorozatok* $\mathbb{R}$ *feletti vektortere, és* X *elemei azok a sorozatok, amelyek*

– *minden eleme 0 vagy 1;*
– *valamelyik eleme 1, az összes többi 0;*
– *minden eleme irracionális.*

2. *Adjunk meg egy-egy bázist az alábbi vektorterekben.*

a) *A komplex számok vektortere* $\mathbb{R}$ *felett.*
b) *A sík* $\mathbb{R}$ *felett.*
c) *A legfeljebb* n*-edfokú* T *feletti polinomok a* T *test felett.*
d) *A legfeljebb* n*-edfokú* $\mathbb{C}$ *feletti polinomok* $\mathbb{R}$ *felett.*
e) *Azon valós* (a_i) *sorozatok* $\mathbb{R}$ *felett, melyekre* $i \geq 4$ *esetén* $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} + a_{i-3}$*?*
f) *Azon legfeljebb tizedfokú* f *polinomok* $\mathbb{R}$ *felett, melyekre*

– $f(2) = 0$; – $f(1) = f(-1)$;
– $x^3 + 2 \mid f$; – $f(2i) = 0$;
– f *az* $x^4 + 1$*-gyel maradékosan osztva konstans maradékot ad.*

3. *Legyen* V *egy* n*-dimenziós vektortér, és* F, G *véges részhalmazai* V*-nek. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha* F *független is és generátorrendszer is, akkor* F *maximális független részhalmaz.*
b) *Ha* F *maximális független, akkor* F *generátorrendszer.*
c) *Összefüggő részhalmaz nem lehet generátorrendszer.*
d) *Ha* G *minimális generátorrendszer, akkor független.*
e) *Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.*
f) *Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.*
g) *Ha* F *elemszáma* n*, és független, akkor generátorrendszer is.*
h) *Ha* G *elemszáma* n*, és generátorrendszer, akkor független is.*
i) *Bármely* n *elemű részhalmaz generátorrendszer.*
j) *Van olyan* $n+1$ *elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.*
k) *Ha nincs 19 elemű generátorrendszer, akkor van 20 elemű független rendszer.*
ℓ*)* V *elemszáma legalább* 2^n.
n) *Ha* $H \subseteq V$*, akkor* H *pontosan akkor generátorrendszer, ha* G *minden eleme előállítható* H *elemeinek lineáris kombinációjaként.*

4. *Legyen egy* V *vektortérben* $A \subseteq B \subseteq V$*. Mutassuk meg, hogy* A *rangja legfeljebb akkora, mint* B *rangja. Mi a rangok egyenlőségének a feltétele?*

5. *Legyenek* $v_1, \dots, v_n$ *vektorok egy* V *vektortérben. Ha a* $v_i + v_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ *vektorok rendszere bázis, mennyi lehet a tér dimenziója?*

6*. *A szultán gondolt* $\mathbb{R}^{1001}$*-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?*