Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Nyolcadik alkalom

1. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?*

a) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi mátrixok oszlopvektorai.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben az alábbi polinomrendszerek.

$$\{1, x, x^2\} \qquad \{1+x, 1+2x, 1+3x\} \qquad \{1+x, 1+x^2, x+x^2\} \qquad \{x, 2x, x^2, x^3\}$$

c) A $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ vektortérben

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

d) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.

e) A sík tetszőleges három pontja $\mathbb{R}$ felett.

f) Egy T test feletti T^n vektortérben $n+1$ tetszőleges vektor.

2. *Adjunk meg*

a) egy tetszőleges T test feletti T^n vektortérben n független vektort;

b) egy tetszőleges T test feletti $T^{n\times k}$ vektortérben nk független mátrixot;

c) a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{Q}^3$ vektortérben három összefüggő vektort úgy, hogy bármely kettő független legyen.

3. *Mutassuk meg, hogy egy vektorrendszer akkor és csak akkor összefüggő, ha valamelyik eleme függ a többitől. Igaz-e, hogy egy vektorrendszer akkor és csak akkor összefüggő, ha mindegyik eleme függ a többitől?*

4. *Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) Az üres halmaz mindig független.

b) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.

c) Az egy vektorból álló rendszer akkor és csak akkor független, ha az az egyetlen vektor nem a nullvektor.

d) Két független vektorrendszer uniója is független, ha az unióban esetleg többször szereplő vektorokból csak egyet-egyet hagyunk meg.

e) Ha $\{a, b, c\}$ független, akkor $\{a+b, b, c\}$ is független.

f) Ha $\{a, b, c, d\}$ független, akkor $\{a+b+c, b+c, c+d, d\}$ is független.

g) Ha $\{a, b, c\}$ független, akkor tetszőleges v-re $\{a+v, b+v, c+v\}$ is független.

h) Ha a $v_1, \dots, v_n$ vektorok között pontosan egy olyan van, amely függ a többi $n-1$ vektortól, akkor ez szükségképpen a nullvektor.

i) Ha egy végtelen test feletti vektortérben a $v_1, \dots, v_n$ vektoroknak csak véges sok lineáris kombinációja állítja elő a nullvektort, akkor ezek a vektorok függetlenek.

j) Ha $\{a, b, c, d\}$ független, de $\{a, b, c, e\}$ és $\{c, d, e\}$ összefüggő, ahol $e \neq 0$, akkor $\{a, b, d, e\}$ független.

k) Ha $\{a, b, c\}$ független, de $\{a, b, d\}$ is, $\{a, c, d\}$ is és $\{b, c, d\}$ is összefüggő, akkor $d = 0$.