Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hetedik alkalom

1. *Vektorterek-e az alábbi struktúrák? Ha nem, mely axiómák nem teljesülnek?*

a) *A T test feletti n magas oszlopvektorok közül azok, melyek komponenseinek összege nulla, a szokásos műveletekre.*

b) *A T test feletti legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza, a polinomok szokásos összeadására, és T elemeivel mint a megfelelő konstans polinommal való szorzásra.*

c) *A komplex számok $\mathbb{R}$ felett, ahol az összeadás a szokásos, és egy valós „skalárral" egy komplex „vektort" úgy szorzunk, hogy a két számot a szokásos módon összeszorozzuk.*

d) *A pozitív valós számok $\mathbb{R}$ felett a szokásos összeadással és szorzással.*

e) *A pozitív valós számok $\mathbb{R}$ felett az $u \oplus v = u \cdot v$, $\lambda v = v^{\lambda}$ műveletekre.*

f) *A valós számok $\mathbb{R}$ felett az $u \oplus v = u + v - 3$ és $\lambda \odot v = \lambda v - 3\lambda + 3$ műveletekre.*

g) *A sík (a tér) pontjai az $\mathbb{R}$ felett. A műveletek a következők. Kijelölünk tetszőlegesen egy O pontot, ez lesz az origó. Ha P és Q adott, akkor $P + Q = R$ legyen az a pont, melyre $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $R = \lambda P$ legyen az a pont, melyre $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OP}$ (azaz $|\lambda|$-szeres nyújtás, és negatív λ esetén még az origóra való tükrözés).*

h) *$V = \{a, b\}$, $a + a = a + b = b + a = a$, $b + b = b$, és $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ esetén $\lambda v = v$.*

2. *Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából. Következik-e az additív inverz létezése a többi axiómából?*

3. *Igazoljuk tetszőleges T test feletti V vektortérben az alábbi állításokat.*

a) $(\forall\lambda \in T)(\lambda 0_V = 0_V)$ *és* $(\forall v \in V)(0_T v = 0_V)$.

b) $(\forall\lambda \in T)(\forall v \in V)(\lambda v = 0_V \implies (\lambda = 0_T \vee v = 0_V))$.

4. *Kifejezhető-e v az X elemeinek lineáris kombinációjaként az alábbi esetekben?*

a) $X = \{1 + x + x^2, 2 - x + x^2, 3 + 2x^2\}$, $v = 1 + x - x^2$ *illetve* $v = 1 - 2x$ *($\mathbb{R}$ felett).*

b) $X = \{2x + y + z = 4, x - y + 3z = 3\}$, *$v$ pedig* $x + y + z = 4$ *($\mathbb{R}$ felett).*

5. *Adjuk meg az X elemeinek lineáris kombinációjaként kifejezhető elemeket.*

a) $X = \{u, v\}$ *két origóból kiinduló térvektor ($\mathbb{R}$ felett).*

b) $X = \{J, M\}$ *két háromszor hármas mátrix: J minden eleme 1, M pedig $((m_{ij}))$, ahol $m_{ij} = 3 * (i - 1) + j$ ($\mathbb{R}$ felett).*

c) *A valós számsorozatok vektorterében ($\mathbb{R}$ felett)*

$$X = \{(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots), (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)\}.$$

6. *Legyen V vektortér. Mely állítások igazak az alábbiak közül?*

a) *Ha $u, v \in V$, és u kifejezhető v lineáris kombinációjaként, akkor v is kifejezhető az u lineáris kombinációjaként?*

b) *Ha $u, v, w \in V$, u kifejezhető v és w lineáris kombinációjaként, és w kifejezhető u és v lineáris kombinációjaként, akkor v is kifejezhető u és w lineáris kombinációjaként.*

c) *Egyetlen vektor sem fejezhető ki az üres halmaz elemeinek lineáris kombinációjaként.*

7. *Igaz-e, hogy (egy adott T test elemeiből képezett) periodikus sorozatok tetszőleges lineáris kombinációja is periodikus? Igaz-e, hogy két periodikus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény tetszőleges lineáris kombinációja is periodikus?*