Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hatodik alkalom

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned} \qquad \textit{HF:} \quad \begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

4. *Tekintsünk egy 3 egyenletből és 4 ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszert a mod 5 maradékosztályok teste felett. Hány megoldása lehet az egyenletrendszernek?*

5. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 1996. Melyek ezek a számok? Hogyan módosul a feladat, ha a megoldást $\mathbb{Z}_p$-ben keressük (ahol p prím)?*

További gyakorló feladatok

6. *Legyen (E) az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ egyenletekből álló lineáris egyenletrendszer. Jelölje (E') az $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_1$ egyenletekből álló egyenletrendszert. Milyen kapcsolat van az (E) és az (E') megoldásainak halmaza között?*

7. *Van-e alkalmas test felett olyan 5 egyenletből álló és 3 ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer, amelynek 0, 1, 5, 9, illetve végtelen sok megoldása van? Hogyan módosulnak a válaszok, ha 3 egyenletből álló és 5 ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert kell megadnunk?*

8. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket ($a \neq b$ adott):*

$$\begin{aligned} 2x - 3y - z + 5u - 17v &= 10 \\ 3x + 2y + 2z - 12u + 7v &= -16 \\ 7x - 4y - 2u - 27v &= 4 \\ x + y + z - 5u + 4v &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$