Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Ötödik alkalom

Egy egész együtthatós polinom *primitív*, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1. Gauss lemmája szerint két primitív polinom szorzata is primitív. Ennek következménye, hogy egy egész együtthatós polinom akkor és csak akkor felbonthatatlan $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans prímszám, vagy primitív, és irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Egy polinomnak akkor és csak akkor van gyöke, ha van **elsőfokú** tényezője. Ezért test felett egy elsőfokú polinom mindig irreducibilis, és mindig van gyöke; egy másod- vagy harmadfokú akkor és csak akkor irreducibilis, ha nincs gyöke; egy legalább negyedfokú biztosan reducibilis, ha van gyöke, de ha nincs, akkor lehet reducibilis is és irreducibilis is.

A Racionális Gyökteszt: ha p/q racionális gyöke az $a_nx^n+\cdots+a_0$ egész együtthatós polinomnak, ahol $(p,q)=1$, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$. További ötletek az irreducibilitás eldöntésére:
- f akkor és csak akkor irreducibilis, ha egy eltoltja ($f(x+c)$) az.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.
- Bontsuk fel a polinomot egy nagyobb testben, és használjuk a felbontás egyértelműségét.

1. *Bontsuk $\mathbb{Z}[x]$-ben felbonthatatlanok szorzatára $30x^2+24$-et és $10x^2+15x+6$-ot.*

2. *Igazoljuk, hogy ha p prím, akkor a $\Phi_{p^n}(x)$ körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

3. *Bontsuk fel az alábbi polinomokat irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ felett: x^2-3x+2, x^2-x-1, x^3+x+3, x^4+4, x^4+9.*

4. *Legyen $f(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=x^4-10x^2+1$. Mutassuk meg, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

5. *Hány olyan f, g, ill. h egész együtthatós polinom létezik, amelyre*
 a) *$f(4)=5$ és $f(14)=13$;*
 b) *$g(a)=g(b)=0$ és $g(c)=1$ (a,b,c adott, páronként különböző egészek);*
 c) *$h(a)=h(b)=h(c)=0$ és $h(d)=1$ (a,b,c,d adott, páronként különböző egészek).*

További gyakorló feladatok

6. *Az alábbi polinomok mindegyikéről döntsük el, hogy irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett: x^4+1, x^4+2, $2x^4+2x^2+1$, x^3+9, $x^6-10x+10$, $x^4+x^3+x^2+1$.*

7. *Bontsuk fel az x^4+1 polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}_2$ ill. $\mathbb{Z}_3$ fölött.*

8. *Vezessük le a Racionális Gyöktesztből, hogy ha k és n pozitív egészek, és $\sqrt[k]{n}$ nem egész, akkor irracionális.*

9. *Adjunk meg végtelen sok olyan $c>0$ egészt, amelyre az n^4+c ($n=1,2,\dots$) számok valamennyien összetettek.*

10. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{Z}[x]$, $m \in \mathbb{Z}$ és $a/b \in \mathbb{Q}$, ahol $(a,b)=1$. Mutassuk meg, hogy ha $f(a/b)=0$, akkor $a-mb \mid f(m)$.*

11. *Tegyük fel, hogy egy legfeljebb n-edfokú egész együtthatós polinom $n+1$ egymás utáni egész helyen egész értéket vesz fel. Igazoljuk, hogy akkor minden egész helyen egész értéket vesz fel.*