Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Negyedik alkalom

Legyen $n \geq 1$ és $\Phi_n(x) = (x-\xi_1)\dots(x-\xi_{\varphi(n)})$, ahol $\xi_1,\dots,\xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök (ez az úgynevezett *n-edik körosztási polinom*). Ekkor $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$, mert

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1\,.$$

A Schönemann-Eisenstein irreducibilitási kritérium azt mondja ki, hogy ha f egész együtthatós, nem konstans polinom, és van olyan p prímszám, mely osztja f minden együtthatóját a főegyüttható kivételével (amit nem oszt), és p^2 nem osztja f konstans tagját, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

1. *Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan n-edfokú polinom, melynek i hatszoros gyöke. Lehet-e $n = 10$? Adjuk meg az összes f-et, melyre $n = 12$. Ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, mennyi lehet n?*

2. *Számítsuk ki a fenti rekurziós képlettel a $\Phi_{12}(x)$ polinomot, és a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat. Bizonyítsuk be magát a képletet, és azt, hogy $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.*

3. *Bontsuk fel az alábbi polinomokat irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ felett:* $x^2 - x - 1$, $x^2 + 2x + 2$, $x^4 + 4$.

4. *Írjuk fel az összes másodfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett. Melyek lesznek irreducibilisek? Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

5. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium:* $x^{11} + 2x + 18\,,\ x^{11} + 2x + 12\,,\ x^{11} + 12x + 5\,,\ x^{11} + n\ (n =?)$.

6. *A $6x^4 - 9x + 1$ polinomot modulo 3 vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ennek alapján fogalmazzunk meg, és bizonyítsunk be egy olyan irreducibilitási kritériumot, ami a Schönemann-Eisenstein tételből a polinom „megfordításával” keletkezik.*

További feladatok

7. *Bizonyítsuk be az algebra alaptételének felhasználásával, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak létezik valós gyöke.*

8. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.*

9*. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, akkor $\Phi_p(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

10. *Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, p egy prímszám, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.*
b) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.*
c) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*
d) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*
e) *Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ felett k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.*
f) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.*

11*. *Mely $n > 0$ esetén létezik végtelen sok olyan c pozitív egész szám, amelyre $x^n + c$* **nem** *irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött?*