Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Harmadik alkalom

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések. Legyen $f(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\dots+(-1)^n\sigma_n$ (előjelek!). Ekkor

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1+x_2+\dots+x_n && \binom{n}{1}=n \quad \text{tag}\\
\sigma_k &= x_1x_2\dots x_k+\dots && \binom{n}{k} \quad \text{tag}\\
\sigma_n &= x_1x_2\dots x_n && \binom{n}{n}=1 \quad \text{tag.}
\end{aligned}$$

A σ_k úgy keletkezik, hogy az $x_1,\dots,x_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott x_i–ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

1. *Legyenek a,b,c az x^3+x+1 polinom gyökei. Mutassuk meg, hogy ezek páronként különbözők, majd írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek három gyöke*
- *a) $a-1$, $b-1$, $c-1$.*
- *b) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.*
- *c) $-a$, $-b$, $-c$.*
- *d) $a+b$, $a+c$, $b+c$.*
- *e) $1/a$, $1/b$, $1/c$.*
- *f) ab, ac, bc.*
- *g) a^2, b^2, c^2.*

Házi feladatként oldjuk meg a feladatot a $3x^3-7x^2-2x+1$ polinomra is.

2. *Oldjuk meg a Cardano-képlettel az $x^3-x-6=0$ és az $x^3-7x+6=0$ egyenleteket. A gyökvonásokat is végezzük el!*

3. *Van-e olyan $f\in\mathbb{Z}_7[x]$, hogy az $\overline{1}$ az f-nek és f'-nek ugyanannyiszoros gyöke?*

4. *Mely $c,d\in\mathbb{C}$-re lesz a 3 kétszeres gyöke a $2x^5-7x^4+5x^2+cx+d$ polinomnak?*

További gyakorló feladatok

5. *Három szám reciprokainak összege megegyezik a három szám összegének a reciprokával. Mutassuk meg, hogy a három szám közül kettő egymásnak ellentettje.*

6. *Oldjuk meg a $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=-1$ egyenletet a valós számok halmazán. Mi változik, ha a feladatot a komplex számok halmazán tekintjük?*

7. *Mely komplex együtthatós polinomok oszthatók a deriváltjukkal?*

8. *Mutassuk meg, hogy egy komplex együtthatós polinom minden nem nulla komplex gyökének a multiplicitása kisebb, mint a polinom nem nulla tagjainak a száma.*

9. *Legyen $c\in\mathbb{C}$ adott. Mely $f\in\mathbb{C}[x]$ polinomokra igaz, hogy $f(\alpha)=0 \implies f(c\alpha)=0$ minden $\alpha\in\mathbb{C}$ esetén?*

10*. *Legyen f valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy f előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*