Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Második alkalom

1. *Legyen n pozitív egész.*

a) Írjuk fel az $x^n - 1$, $x^4 + 1$, $x^n - z$ polinomokat gyöktényezős alakban $\mathbb{C}$ felett, ahol $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges.

b) Mi lesz $x^{12} - 1$ és $x^{16} + 1$ legnagyobb közös osztója?

c) Határozzuk meg az n-edik komplex egységgyökök összegét és szorzatát az $x^n - 1$ polinom vizsgálatával.

d) Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

2. *Egy tündér megsúgta nekünk, hogy az $x^4 + x + 1$ polinomnak négy különböző komplex gyöke van. Határozzuk meg ezek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

3. *Legyen $p > 0$ prímszám.*

a) Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_p$ gyűrű test.

b) Mutassuk meg, hogy $0 < d < p$ esetén legfeljebb d (modulo p páronként inkongruens) megoldása van az $x^d \equiv 1 \ (p)$ kongruenciának.

c) Írjuk fel az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p$ polinomot gyökténysző alakban.

d) Írjuk fel az $x^{p-1} - 1 \in \mathbb{Z}_p$ polinomot gyökténysző alakban.

e) Vezessük le Wilson tételét az előző képletből.

f) Bizonyítsuk be, hogy ha $p > 2$, akkor az

$$N = (p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right)$$

egész szám osztható p-vel.

g) Mutassuk meg, hogy az N szám $p > 3$ esetén p^2-tel is osztható.

Házi feladatok

4. *Számítsuk ki az $x^n \pm 1$ és az $x^k \pm 1$ $\mathbb{C}$ feletti polinomok legnagyobb közös osztóját (az összes lehetséges variációban). Más lesz-e az eredmény akkor, ha ezeket $\mathbb{Q}$ feletti, polinomoknak tekintjük?*

5. *Egy f egész együtthatós polinom főegyütthatója 1, és f minden (komplex) gyöke 1-nél kisebb abszolút értékű. Adjuk meg f többi együtthatóját.*

6. *Egy f tizedfokú egész együtthatós polinomról tudjuk, hogy $f(n)$ minden egész n–re osztható 11–gyel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor szükségképpen f minden együtthatója is osztható 11–gyel.*

7. *Mutassuk meg, hogy ha az $f(x^n)$ polinom osztható $x-1$-gyel, akkor osztható x^n-1-gyel is. Függ-e az állítás igazsága attól, hogy melyik test felett vagyunk?*

8. *Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi polinomot. (Az üres szorzat értéke 1.)*

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!} \, .$$