Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Tizenkettedik alkalom

1. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

2. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a definíció alapján és Gauss-eliminációval is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3. *Legyen T test, $A \in T^{k\times k}$, $B \in T^{m\times m}$, $X \in T^{k\times m}$ és O az $m \times k$-s nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

4. *Az előző feladat alapján igazoljuk, hogy ha egy determináns főátlója alatt csupa nulla áll, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata. Igazoljuk azt is, hogy ha egy négyzetes mátrix determinánsa nem nulla, akkor Gauss-eliminációval ilyen alakra hozható.*

5. *Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.*

7. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

További gyakorló feladatok

8. *Legalább mennyi és legfeljebb mennyi lehet egy n elemű halmaz egy permutációjának inverziószáma? Fellép-e ezen két szélső érték között minden természetes szám alkalmas permutáció inverziószámaként?*

9. *Egy determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.*

10. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

11. *Hogyan változik egy mátrix determinánsa, ha a mátrixot tükrözzük a főátlójára, a vízszintes szimmetriatengelyére, a középpontjára; a középpontja körül 90 fokkal elforgatjuk?*

12. *Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan 2×2-es mátrix van, amelynek minden eleme egész szám, determinánsa pedig 1. Igazoljuk a megfelelő állítást $n \times n$-es mátrixokra, ha $n \geq 2$.*