Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Tizenegyedik alkalom

1. *Legyen T tetszőleges test.*

a) *Legyen $T^{n\times n}$-ben $J_n = ((1))$, rögzített i,j-re pedig legyen $E^{i,j}$ az a mátrix, amelynek (i,j)-edik eleme 1, az összes többi pedig 0. Tetszőleges $A \in T^{n\times n}$-re és $\alpha \in T$-re határozzuk meg az $A(\alpha I_n)$, $(\alpha I_n)A$, $(\alpha J_n)A$, $A(\alpha J_n)$, $AE^{i,j}$, $E^{i,j}A$ szorzatokat.*

b) *Mik azok a $T^{n\times n}$-beli mátrixok, amelyek minden $T^{n\times n}$-beli mátrixszal felcserélhetők?*

2. *Az alábbi valós elemű mátrixok közül melyiknek létezik balinverze? Amelyeknek létezik, azoknak határozzuk is meg egy-egy balinverzét.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. *Legyen $A \in T^{n\times k}$, $B \in T^{k\times \ell}$ és tegyük fel, hogy A-nak is és B-nek is létezik bal (jobb) oldali inverze. Mutassuk meg, hogy akkor AB-nek is létezik bal (jobb) oldali inverze. Igaz-e az állítás megfordítása?*

4. *Számítsuk ki a 2. feladatban szereplő utolsó három mátrix rangját. Mik a lehetséges értékei egy $n \times k$-as mátrix rangjának?*

5. *Legyen T test és $A, B \in T^{n\times k}$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{r}(A+B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.*

6. *Egy M mátrixot bal oldali nullosztónak nevezünk, ha van hozzá olyan* **nemnulla** *B mátrix, amelyre $MB = 0$. Igazoljuk, hogy egy mátrix pontosan akkor bal oldali nullosztó, ha nem létezik balinverze. Definiáljuk a megfelelő jobb oldali fogalmat, mondjuk ki és bizonyítsuk be rá az analóg állítást.*

További gyakorló feladatok

7. *Adjunk meg olyan $\mathbf{Q}^{5\times 5}$-beli M mátrixot, amellyel tetszőleges $\mathbf{Q}^{5\times 5}$-beli A mátrixot balról megszorozva azt a mátrixot kapjuk, amelynek első, második és negyedik sora megegyezik az A megfelelő sorával, harmadik sora az A második sorával, ötödik sora pedig az A első sorának és negyedik sora kétszeresének az összegével egyenlő.*

8. *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = I$ egyenlet összes megoldását.*

9*. *Legyen T test, $A, B \in T^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $A + B = A \cdot B$.*

a) *Mutassuk meg, hogy $A \cdot B = B \cdot A$.*

b) *Helyes-e a következő bizonyítás: „Mivel $A + B = A \cdot B$, és a mátrixösszeadás kommutatív, azért $B \cdot A = B + A = A + B = A \cdot B$".*

10*. *Legyen T test és $A, C \in T^{n\times k}$. Igazoljuk, hogy az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*

(1) *Minden $\underline{b} \in T^n$-re teljesül, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha a $C\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása.*

(2) *Léteznek olyan M és N mátrixok $T^{k\times k}$-ban, amelyekre $C = AM$ és $A = CN$.*

(3) *Létezik olyan invertálható M mátrix $T^{k\times k}$-ban, amelyre $C = AM$ és $A = CM^{-1}$.*