Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Tizedik alkalom

1. *Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?*

a) V egy T test feletti polinomok szokásos vektortere T felett, W pedig azon polinomokból áll, melyeknek a foka páros, és még a zéruspolinomból.

b) V a komplex számok szokásos vektortere $\mathbb{R}$ felett, és W a képzetes egyenes.

c) V a komplex számok vektortere $\mathbb{C}$ felett, W ugyanaz, mint az előbb.

d) V a valós számok vektortere $\mathbb{R}$ felett, és W a nemnegatív valós számok halmaza.

e) V a sík $\mathbb{R}$ felett, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója (a tengelyekkel együtt).

f) W egy összeadásra és tetszőleges skalárral való szorzásra zárt nem üres részhalmaz.

2. *Legyen V a sík (helyvektorai), mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér.*

a) Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?

b) Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.

c) Hány altere van a $\mathbb{Z}_2$ test feletti $\mathbb{Z}_2^2$ és $\mathbb{Z}_2^3$ vektortereknek? És a $\mathbb{Z}_7$ feletti $\mathbb{Z}_7^2$-nek?

3. *Legyen V vektortér a T test felett.*

a) Ha $T = \mathbb{R}$ és $V = \mathbb{R}[x]$, akkor igaz-e, hogy $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2\rangle$? És az, hogy $\langle x, x^2 + 2, x + 2\rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1\rangle$?

b) Legyen $\lambda \in T$ és $u, v, w \in V$. Igazoljuk, hogy $\langle u, v, v\rangle = \langle u + \lambda v, v, w\rangle$. Mikor igaz, hogy $\langle u, v, w\rangle = \langle \lambda u, v, w\rangle$?

c) Mi az az altér, amelyet a (végtelen) valós számsorozatok terében a monoton növő sorozatok generálnak?

d) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.

e) Ha U_1 és U_2 alterek V-ben, akkor legyen $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\langle U_1 \cup U_2\rangle = U_1 + U_2$.

4. *Az alábbiakban négy bizonyítást adunk arra, hogy egy altér nulleleme megegyezik a vektortér nullelemével, ezek közül azonban csak az egyik helyes. Melyik a helyes, és mi a hiba a többiben? (Altéren itt olyan W részhalmazt értünk, ami maga is vektortér V összeadására és skalárral való szorzására nézve. A V nullelemét 0_V, a W-ét 0_W jelöli.)*

a) Mivel $0_V + v = v$ minden $v \in V$-re, tehát W elemeire is teljesül, ezért 0_V definíció szerint W-nek is nulleleme. A W-beli nullelem egyértelműsége alapján így $0_W = 0_V$.

b) Ha $0_W \neq 0_V$ lenne, akkor V-ben két nullelem lenne, ami ellentmond a V-beli nullelem egyértelműségének.

c) Legyen $v \in W$ tetszőleges. Ekkor $0_V + v = v$ és $0_W + v = v$ egyaránt fennáll, tehát $0_V + v = 0_W + v$. Itt mindkét oldalhoz a v vektor W-beli [a negyedik bizonyításban: V-beli] ellentettjét hozzáadva a kívánt $0_V = 0_W$ egyenlőséget kapjuk.

5. *Legyen W altere az $\mathbb{R}$ feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u + 6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik–e ebből, hogy $u, v \in W$?*

6. *Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?*

7. *Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen T testek felett igaz még ez az állítás? Hány $n-1$-dimenziós altere van egy $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek?*

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX