Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Első alkalom

Ezen a feladatsoron minden gyűrű kommutatív és egységelemes. A modulo n maradékosztályok gyűrűjét $\mathbb{Z}_n$ jelöli.

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a racionális együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*
 a) $(x^3+3x^2+2)-(x^3+3x-4)$
 b) $(x^2+5x+3)(x^2+2)$
 c) $x^3-2 \,:\, 2x^2+2x-3$ *(Mi a hányados és a maradék?)*

2. *Legyen* $R=\mathbb{Z}_8$.
 a) *Adjunk meg két másodfokú polinomot R felett úgy, hogy a szorzatuk elsőfokú legyen!*
 b) *Adjuk meg az x^2-1 polinom* **összes** *gyökét R-ben, és végezzük el a megfelelő gyöktényező kiemelését. Kiemelhető-e* **egyszerre** *az összes gyöktényező?*

3. *Legyen p prím, és jelölje R a $\mathbb{Z}_p$ feletti polinomfüggvények gyűrűjét.*
 a) *Írjuk fel táblázatosan a $\mathbb{Z}_2$ feletti x, x^2, x^3, $x+\overline{1}$, x^2+x, $x^2+x+\overline{1}$, x^3+x^2 polinomokhoz tartozó polinomfüggvényeket. Megkaptunk-e minden lehetséges függvényt ezen a halmazon? Hány polinom, és hány polinomfüggvény van $\mathbb{Z}_2$ felett?*
 b) *Készítsük el a $p=2$ esetben R összeadási és szorzási táblázatát. Nullosztómentes gyűrűt kaptunk-e? Mik az invertálható elemek?*
 c) *Mutassuk meg, hogy az $f\in\mathbb{Z}_2[x]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvény akkor és csak akkor azonosan nulla, ha $x^2-x \mid f$.*
 d) *Mi lesz az x^p-x-hez tartozó polinomfüggvény?*
 e) *Mutassuk meg, hogy R semmilyen p-re sem nullosztómentes.*
 f) *Mutassuk meg, hogy $p=3$ esetén van olyan invertálható eleme R-nek, ami nem konstans függvény.*

Házi feladatok

4. *Írjuk fel az $f=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ és $f=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinomok szorzatában az x^k-os tag együtthatóját a szumma-jelölés segítségével.*

5. *Legyen R tetszőleges kommutatív gyűrű, $f=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$ és $c\in R$. Definiáljuk a $b_{k-1},b_{k-2},\ldots,b_0,b_{-1}$ elemeket a következő rekurzióval: $b_{k-1}=a_k$, és $b_i=c\cdot b_{i+1}+a_{i+1}$, ahol $i=k-2,k-3,\ldots,0,-1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f=(x-c)(b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0)+b_{-1}$.*

6. *Mit kapunk maradékul, ha az x^{1996} polinomot maradékosan osztjuk x^2+x+1–gyel? (Ötlet: mik x^2+x+1 komplex gyökei?)*

7. *Legyen $f\in\mathbb{R}[x]$, melyre $f(i)=0$. Igazoljuk, hogy $x^2+1\mid f$.*

8. *Legyen R nullosztómentes gyűrű. Határozzuk meg az $R[x]$ polinomgyűrű invertálható elemeit.*

9. *Legyen T véges test. Mutassuk meg, hogy a T feletti polinomfüggvények gyűrűje véges, és nem nullosztómentes.*