Mat-tanári algebra félsáv, hatodik félév

Második vizsga — megoldások

2. Legyen n a 11-Sylow részcsoportok száma. Ekkor $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ miatt, a Sylow-tételeket a stencilben leírt módon alkalmazva kapjuk, hogy $n \mid 18$ és $n \equiv 1$ (11). Ezért $n = 1$, és így az egyetlen 11-Sylow részcsoport normálosztó. Ha most $|G| = 99 = 11 \cdot 9$, akkor az előző gondolatmenet szerint G-ben is normálosztó a 11-Sylow, de ebben a 3-Sylow is normálosztó, hiszen $11 \not\equiv 1$ (3). Ezért G a Sylowjainak direkt szorzata. Mivel prímnégyzet rendű csoport kommutatív, a 3-Sylow, és így G is az, és a véges Abel-csoportok alaptételéből kapjuk, hogy G kétféle lehet: ciklikus, vagy $\mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_{11}$.

3. Legyen K egy kilencelemű test. Ekkor a $K \cup \{\infty\}$-n értelmezett törtlineáris leképezések csoportjáról beláttuk, hogy 3-tranzitív, de nem 4-tranzitív (azért nem, mert kiszámoltuk, de könnyen látható is, hogy 0, 1 és ∞ egyszerre csak az identitásnál marad fixen).

4. A transzformáció **ortonormált** bázisban felírt mátrixának kell azt teljesítenie, hogy az inverze éppen a transzponáltjának a konjugáltja!

6. A konjugált osztályok száma 6 és ezért még két irreducibilis karakter létezik. Az egyik, χ_5, a főkarakter kell, hogy legyen, ami azonosan 1. A csoport rendje $1+1+2+2+3+3 = 12$, ez egyenlő az irreducibilis karakterek fokainak négyzetösszegével. Tehát χ_4 és χ_6 fokainak négyzetösszege 8. Ez csak úgy lehet, ha mindkettő másodfokú, hiszen a 8 máshogy nem áll elő két négyzetszám összegeként. Azaz χ_4 és χ_6 értéke a K_1-en 2. A χ_6 többi értékét az ortogonalitási relációk felírásával kaphatjuk meg (vigyázzunk, a konjugált osztályok elemszámát is figyelembe kell venni, és bármely karakterre $\chi(g^{-1})$ a $\chi(g)$ konjugáltja). A kapott egyenletrendszerből adódik, hogy χ_6 sora $2, 2, -1, -1, 0, 0$. Az elsőfokú karakterek centruma G, a két másodfokúé pedig $Z(G) = K_1 \cup K_2$.