Mat-tanári algebra félsáv, hatodik félév
Első vizsga — megoldások

1. Nincs, hiszen minden kommutátor nyilvánvalóan páros permutáció.

2. Ilyen például két különböző hosszúságú diszjunkt útnak az uniója, hiszen mindkét utat meg lehet fordítani külön-külön (ez a négy permutáció nyilván Klein-csoportot alkot), és más permutáció nincs, hiszen elsőfokú pont elsőfokúba mehet csak, de a két út egymásba nem mehet át.

3. Legyen n a 13-Sylow részcsoportok száma. Ekkor $468 = 4\cdot 9\cdot 13$ miatt, a Sylow-tételeket a stencilben leírt módon alkalmazva kapjuk, hogy $n \mid 4\cdot 9$ és $n \equiv 1\ (13)$. Ezért $n = 1$, és így az egyetlen 13-Sylow részcsoport normálosztó.

4. $k = 1$. A hatás nyilván tranzitív (a forgatások is már mindent mindenhova elvisznek), de nem 2-tranzitív, mert élt átlóba nem lehet elvinni egybevágósággal.

7. A konjugált osztályok száma 4 és ezért még egy irreducibilis karakter létezik. A csoport rendje $1+4+4+3 = 12$, ez egyenlő az irreducibilis karakterek fokainak négyzetösszegével, a keresett χ_4 foka tehát 3. Az egységelemet nyilván K_1 tartalmazza, hiszen csak ez a konjugált osztály egyelemű. Tehát χ_4 értéke a K_1-en 3. A többi értéket az ortogonalitási relációk felírásával kaphatjuk meg (vigyázzunk, a konjugált osztályok elemszámát is figyelembe kell venni). A kapott egyenletrendszerből adódik, hogy χ_4 sora $3, 0, 0, -1$.

A karakterek magját megadó képletből kapjuk, hogy χ_1 magja G, a χ_2 és a χ_3 magja $N = K_1 \cup K_4$, a χ_4-é pedig csak az egységelemből áll. Az első három karakter centruma G, a negyediké viszont K_1, és így a csoport centruma, azaz ezek metszete is csak az egységelemből áll. Végül a kommutátorrészcsoport az N lesz. Valóban, minden elsőfokú karakter magja tartalmazza a kommutátorrészcsoportot, hiszen az elsőfokú karakterek egy kommutatív csoportba való homomorfizmusok. Ezért a kommutátorrészcsoport része az N-nek. Mivel normálosztó, konjugált osztályok egyesítése, és így vagy N, vagy K_1. De ha K_1, azaz egyelemű lenne, akkor G kommutatív lenne, ami nem lehet (hiszen akkor centruma az egész G lenne, és mellesleg 12 irreducibilis karaktere és 12 egyelemű konjugált osztálya lenne).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX