Mat-tanári algebra félsáv, hatodik félév

Vizsgadolgozat — 1996. május 16.

Minden feladatot külön lapra írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző neve. Valamennyi megoldásban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont.

1. *Definiáljuk a kommutátor fogalmát (1 pont). Döntsük el, van-e olyan* $x, y \in S_{1996}$, *melyre* $[x, y] = (12)$ *(2 pont).*

2. *Adjunk meg egy olyan irányítatlan gráfot, melynek szimmetriacsoportja a Klein-csoport (3 pont).*

3. *Mondjuk ki pontosan a Sylow-tételeket (3 pont). Mutassuk meg a klasszifikáció felhasználása nélkül, hogy nincs* 468 *rendű egyszerű csoport (3 pont).*

4. *Definiáljuk a* k*-tranzitív hatás fogalmát (1 pont). Adjuk meg azt a legnagyobb* k *egészet, melyre a* D_4 *diédercsoport* k*-tranzitívan hat a négyzet csúcsain (2 pont).*

5. *Legyen* q *prímhatvány. Adjuk meg a* q*-ad rendű véges projektív síkok konstrukcióját (3 pont). Bizonyítani semmit nem kell.*

6. *Mondjuk ki precízen (1 pont) és bizonyítsuk be (5 pont) Maschke tételét. A két elhangzott bizonyítás bármelyikét szabad reprodukálni, de az esetleges segédtételeket is bizonyítani kell.*

7. *Egy* G *csoport konjugált osztályai* K_1, K_2, K_3, K_4, *ezek elemszámai rendre* 1, 4, 4, 3. *A csoportnak ismerjük három irreducibilis karakterét:*

	K_1	K_2	K_3	K_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ε	ε^2	1
χ_3	1	ε^2	ε	1

(itt $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120°$*). Határozzuk meg* G *karaktertábláját (3 pont), az irreducibilis karakterek magjait (1 pont), a* G *csoport centrumát (1 pont) és kommutátor-részcsoportját (1 pont). Egy normálosztót akkor tekintünk meghatározottnak, ha tudjuk, hogy mely konjugált osztályok egyesítése.*