Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Kilencedik feladatsor (2003. május 6)

1. *Határozzuk meg az* $\{1, 2, \ldots, 100\}$ *halmaz alábbi permutációiban az inverziók számát:*

a) *Előről hátra:* $f(i) = 101 - i$;

b) *Utolsó pár előre fuss:* $f(i) = i + 1$ *ha* $i < 100$ *és* $f(100) = 1$;

c) $f(i) = 2i$ *ha* $1 \leq i \leq 50$ *és* $2(i - 50) - 1$ *ha* $51 \leq i \leq 100$;

d) $f(i) = 2i$ *ha* $1 \leq i \leq 50$ *és* $2(100 - i) + 1$ *ha* $51 \leq i \leq 100$.

2. *Legyen* f *az* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaz egy permutációja, és legyen* g *az a permutáció, amelyre* $g(i) = n + 1 - f(i)$. *Mi a kapcsolat* f *és* g *inverzióinak száma között?*

3. *Mutassuk meg, hogy egy* n *elemű halmaz egy permutációjának inverziószáma bármilyen* $n(n-1)/2$*-nél nem nagyobb (nemnegatív egész) szám lehet, de ennél nagyobb nem.*

---

4. *Fejtsük ki a VIII/6 feladat determinánsait az utolsó soruk illetve oszlopuk szerint.*

5. *Igazoljuk, hogy ha egy* $n \times n$*-es mátrixban van egy* $m \times k$*-as téglalap csupa nullákból, és* $m + k > n$, *akkor a mátrix determinánsa nulla.*

6. *Igazoljuk, hogy ha egy páratlan sok sorból álló négyzetes mátrixban a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egymás ellentettjei, akkor a determinánsa nulla. Mi történik, ha a feltevést úgy módosítjuk, hogy a megfelelő elemek egymás konjugáltjai legyenek?*

7. *Igazoljuk, hogy a transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.*

8. *Igazoljuk, hogy ha egy determináns két sorát kicseréljük, akkor az ellentettjére változik.*

9. *Igazoljuk, hogy ha egy determináns főátlója alatt minden elem nulla, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata.*

10. *Mi lehet egy olyan determináns értéke, amelynek minden sora számtani sorozat?*

11. *Leírunk egymás alá tíz darab tízjegyű számot, amelyek mindegyike osztható héttel. Igaz-e hogy a számjegyeikből készített tízszer tizes determináns is osztható héttel?*

12. *Mutassuk meg, hogy ha egy* $n \times n$*-es valós mátrix determinánsa* 1024, *akkor felírható olyan valós mátrixok szorzataként, amelyek determinánsa kettő.*

13*. *Hogyan változik egy* $n \times n$*-es mátrix determinánsa, ha megfordítjuk az oszlopok sorrendjét; ha tükrözzük a mellékátlójára; ha plusz kilencven fokkal elforgatjuk?*

14*. *Mely determinánsok nem változnak meg, ha bármely két elemüket fölcseréljük?*

15*. *Legyen* $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, *és* $f_1, \ldots, f_n$ *legfeljebb* $n - 2$*-edfokú valós együtthatós polinomok. Mi lesz annak a determinánsnak az értéke, ahol az* i*-edik sor* j*-edik eleme* $f_i(a_j)$*?*

---

16. *Adjunk képletet egy általános kétszer kettes mátrix inverzére (vö. VI/2).*

17. *Mutassuk meg, hogy két invertálható* $n \times n$*-es mátrix szorzata is invertálható.*

18. *Adjunk meg végtelen sok olyan valós mátrixot, aminek az inverze önmaga.*

19. *Mutassuk meg, hogy egy egész számokból álló négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van csupa egész számokból álló inverze, ha a determinánsa* 1 *vagy* -1.