Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Nyolcadik feladatsor (2003. április 29)

1. *Az alábbi sormátrixok halmazából válasszunk ki minél több elemű lineárisan független rendszert:* $\underline{a} = [1, 2, 4]$, $\underline{b} = [1, 1, 2]$, $\underline{c} = [0, 1, 2]$, $\underline{d} = [0, 0, 3]$.

2. *Döntsük el, hogy az alábbi rendszerek lineárisan függetlenek-e, összefüggők-e, illetve lehetnek-e ilyenek is és olyanok is:*

a) *lineárisan független rendszerből elhagyunk egyet;*
b) *lineárisan független rendszerhez hozzáveszünk egyet;*
c) *lineárisan összefüggő rendszerből elhagyunk egyet;*
d) *lineárisan összefüggő rendszerhez hozzáveszünk egyet;*
e) *a rendszer egyik eleme egy másiknak a négyszerese;*
f) *a rendszer egyik eleme két másiknak az összege;*
g) *a rendszer egyik eleme a csupa nullából álló oszlopmátrix.*

3. *Legyen* $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ *lineárisan független rendszer. Függetlenek-e az alábbi rendszerek?*

a) $\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \ldots + \underline{a}_n\ ,\ \underline{a}_2 + \ldots + \underline{a}_n\ ,\ \ldots\ ,\ \underline{a}_{n-1} + \underline{a}_n\ ,\ \underline{a}_n\ ;$
b) $\underline{a}_1 - \underline{a}_2\ ,\underline{a}_2 - \underline{a}_3\ ,\ \ldots\ ,\ \underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n\ ,\ \underline{a}_n - \underline{a}_1\ ;$
c) $\underline{a}_1 - \underline{a}_2\ ,\ \underline{a}_2 - \underline{a}_3\ ,\ \ldots\ ,\ \underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n\ ;$
d) $\underline{a}_1 + \underline{a}_2\ ,\ \underline{a}_2 + \underline{a}_3\ ,\ \ldots\ ,\ \underline{a}_{n-1} + \underline{a}_n\ ,\ \underline{a}_n + \underline{a}_1\ ;$
e) $\underline{a}_1 - \underline{a}_2\ ,\ \underline{a}_2 - \underline{a}_3\ ,\ \ldots\ ,\ \underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n\ ,\ \underline{a}_n\ .$

4. *Adjuk meg az alábbi permutációk inverziószámát és előjelét.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

5. *Az* $((a_{ij}))$ *négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele:* $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

6. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat Gauss-eliminációval.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

7. *Számítsuk ki a következő* $n \times n$*-es mátrixok determinánsát.*

a) *A főátlóban* $d_1, \ldots d_n$ *van, másutt nulla.*
b) *A főátlóban* $d_1, \ldots d_n$ *van, felette bármi, alatta nulla.*
c) *A főátló feletti ferde sorban* $d_1, \ldots d_{n-1}$ *van, a bal alsó sarokban* d_n*, másutt nulla.*
d) *Az* i*-edik sor* j*-edik eleme* $i + j$.
e) *Az* i*-edik sor* j*-edik eleme* ij.
f) *A főátlóban végig* b *van, másutt mindenütt* c.
g) *A főátlóban végig* 2 *van, a vele párhuzamos, mellette levő két vonalon* 1*, másutt nulla.*
h) *A főátló végig* b*, a mellékátló végig* c*, itt* n *páros.*
i) *A főátlóban álló elemek rendre* $1, 0, 0, \ldots, 0, 2$*, a főátló fölött minden elem 1-es, az első oszlop minden eleme 1-es, a többi elem nulla.*