Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Hetedik feladatsor (2003. április 8)

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x \qquad + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned} \qquad \textit{HF:} \quad \begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x \qquad\qquad + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t darab (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. *Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, ami $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos, $\mathbb{Z}_2$ felett egynél több megoldása van, és $\mathbb{Z}_3$ felett pontosan 1?*

4. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van?*

5. *Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van? Ha van két valós megoldás, akkor van nem valós megoldás is?*

6. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 2003. Melyek ezek a számok?*

7. *Adott $a \neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$

8. *Van 9 különböző tárgyunk. Tudjuk, hogy bármely nyolcat kiválasztva közülük, ezek két (diszjunkt) 4-es csoportba oszthatók úgy, hogy az egyik csoportban levő tárgyak össztömege megegyezzen a másik csoportba tartozók össztömegével. Mutassuk meg, hogy mind a 9 tárgy tömege egyenlő.*

9. *Oldjuk meg a következő egyenleteket:*

$$x\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\10\end{bmatrix}, \qquad x\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-7\\2\end{bmatrix},$$

$$x\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-7\\4\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&2&4\\3&5&6\end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$