**Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév**
*Hatodik feladatsor (2003. április 1)*

**1.** *Az $AB$, $BA$, $BC$, $CB-C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

**2.** *Végezzük el az alábbi szorzást:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**3.** *Jelölje $E^{(i,j)}$ azt a $3 \times 3$-as mátrixot, amelynek $i$-edik sorában a $j$-edik elem 1, a mátrix összes többi eleme pedig 0. Mi történik, ha egy $3 \times 3$-as $M$ mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(i,j)}$-vel?*

**4.** *Az $M$ és $N$ mátrixok* **felcserélhetők,** *ha $MN = NM$. Határozzuk meg azokat a háromszor hármas mátrixokat, amelyek minden háromszor hármas mátrixszal felcserélhetők.*

**5.** *Van-e olyan $3 \times 3$-as $A$ mátrix, amellyel a bal illetve a jobb oldalról történő szorzás tetszőleges $3 \times 3$-as $X$ mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az $X$ összes többi elemét pedig ellentettjére változtatja?*

**6.** *Adjunk meg olyan $10 \times 10$-es $A \neq B$ mátrixokat és egy $10 \times 100$-as $C \neq \mathbf{0}$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül.*

**7.** *Tegyük fel, hogy a $10 \times 10$-es $A$ és $B$ mátrixokra $AC = BC$ teljesül* **minden** *$10 \times 100$-as $C$ mátrix esetén. Mutassuk meg, hogy akkor $A = B$.*

**8.** *Számítsuk ki az $5 \times 5$-ös $N$ mátrix első öt hatványát, ahol*

$$N_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i-j=1; \\ 0, & \text{ha } i-j \neq 1. \end{cases}$$

**9.** *Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $M_{i,j} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = \mathbf{0}$.*

**10.** *Legyenek $A$ és $B$ $n \times n$-es mátrixok, $n > 0$ egész. Jelöljük az $AB - BA$ mátrixot $K$-val. Számítsuk ki a $\sum_{i=1}^{n} K_{i,i}$ összeget. (Ezt az összeget a $K$ mátrix* **nyomának** *nevezzük.)*

**11.** *Mutassuk meg, hogy*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**12.** *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -E$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = E$ egyenlet összes megoldását. ($E$ az egységmátrix.)*

**13.** *Számítsuk ki a következő hatványokat, tetszőleges pozitív egész $n$ kitevővel ($\alpha$ valós paraméter):*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$