Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Ötödik alkalom (2003. március 18)

Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:
- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.

1. *Számítsuk ki a Φ_n körosztási polinomot, ha $n \leq 12$, és ha n prímhatvány.*

2. *Bontsuk fel az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinomot $\mathbb{R}$ felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ feletti felbontást is.*

3. *Bontsuk $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára a $30x^2+24$ és $10x^2+15x+6$ polinomokat.*

4. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ ($n =?$).*

5. *Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, és p prím. Tegyük fel, hogy az $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ együtthatók mindegyike osztható p-vel, a_0 nem osztható p-vel, és a_n nem osztható p^2-tel. Igazoljuk, hogy ha $\deg f > 0$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

6. *Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett $x^3 + 3$, $x^3 - 4$, $x^{10} + 10$, $x^4 + 1$, $x^4 + 2$, $2x^4 + 2x^2 + 1$, $x^3 + 9$, $x^6 - 10x + 10$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$?*

7. *Legyen p prím. Igazoljuk, hogy $x^5 + p^2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

8. *Van-e olyan legalább másodfokú $\mathbb{Q}[x]$-beli f polinom, amelyhez tetszőleges r racionális számot adva, a kapott $f + r$ polinom mindig irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett?*

9. *Van-e olyan legalább másodfokú $\mathbb{Q}[x]$-beli f polinom, amelyhez tetszőleges r racionális számot adva, a kapott $f + r$ polinom sohasem irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett?*

10. *Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ egymástól különböző egész számok. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

11. *Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ egymástól különböző egész számok. Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor az $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

12. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* $x^7 + x + 1$, $x^2 - 2$, $x^2 + x + 1$.

b) $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7 - x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$.

c) $\mathbb{Z}$ *felett* $x^4 + 2x + 27$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^6 + 1$, $x^3 + 7x - 3$, $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$.

d) $\mathbb{Z}_2$ *felett* $x^8 + x^2 + 1$, $x^5 + x + 1$, $x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $x^5 + x^3 + 1$.

e) $\mathbb{Z}_{17}$ *felett* $x^2 + 1$, $x^4 + 1$, $x^8 + 1$, $x^{17} + 1$, $x^{17} + 2$.