Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Negyedik alkalom (2003. március 11)

Ha $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$, akkor *a gyökök és együtthatók közötti összefüggések* a következők:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{tag}$$

$$\sigma_k = x_1 x_2 \dots x_k + \dots \qquad \binom{n}{k} \quad \text{tag}$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n \qquad \binom{n}{n} = 1 \quad \text{tag.}$$

A σ_k úgy keletkezik, hogy az $x_1, \dots, x_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott x_i–ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

1. *Igazoljuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket másod- és harmadfokú polinomokra, majd általában is. Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

2. *Legyen n pozitív egész. Az n-edik komplex egységgyökök közül minden lehetséges módon kiválasztunk három különbözőt, és ezeket összeszorozzuk. Mi az összege ezeknek a szorzatoknak?*

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy $x^{18} + 3x^{17} + 100x^{16} + a_{15}x^{15} + \dots + a_1 x + a_0$ alakú polinomnak nem létezik gyöktényezős alakja $\mathbb{R}$-ben (azaz nem lehet minden komplex gyöke valós).*

4. *Legyen p prímszám.*
  a) Írjuk föl a $\mathbb{Z}_p[x]$-beli $x^{p-1} - 1$ polinomot gyöktényezős alakban.
  b) Adjunk a fenti gyöktényezős alak segítségével új bizonyítást a Wilson tételre.
  c) Az előbbi módszerrel számítsuk ki az $1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2$ összeg maradékát mod p.

5. *Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom (komplex) gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a+b$, $a+c$, $b+c$. (Eredmény: $x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ illetve $x^3 + 3x - 1$.)*

6. *Milyen összefüggést kell kielégíteniük a komplex együtthatós $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinom együtthatóinak ahhoz, hogy a polinom*
  a) valamelyik gyöke megegyezzen a másik két gyök összegével;
  b) valamelyik gyöke megegyezzen a másik két gyök szorzatával;
  c) gyökei számtani sorozatot alkossanak?

---

7. *Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan n-edfokú polinom, melynek i hatszoros gyöke. Lehet-e $n = 10$? Adjuk meg az összes ilyen polinomot, melynek foka 12. Mutassuk meg, hogy ha $g \in \mathbb{R}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor α és $\overline{\alpha}$ ugyanannyiszoros gyöke g-nek.*

8. *Bontsuk fel az $x^4 + 9$ polinomot $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilisek szorzatára. Feltehető-e egy ilyen felbontásban, hogy a tényezők normált polinomok (azaz főegyütthatójuk 1)?*

9. *Legyen c pozitív egész szám. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy $x^4 - c$ irreducibilis legyen $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{Q}$ fölött? Mi a helyzet negatív c esetén?*