Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Harmadik alkalom (2003. március 4)

1. *Döntsük el, hogy az* $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ *polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel* $f(x)$*-et* $(x-2)g(x) + f(2)$ *alakban.*

2. *Hányszoros gyöke az* $x^4 - x^3 - x + 1$ *polinomnak az 1?*

3. *Írjuk fel az* $x^3 - 1$*, az* $x^2 + x + 1$*, az* $x^2 - x + 1$ *és az* $x^4 - x^2 + 1$ *polinomokat gyöktényezős alakban. Honnan ismerősek a gyökök?*

4. *Írjuk fel az* $x^4 + 4$ *polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

5. *Mutassuk meg, hogy ha két* n*-edfokú komplex együtthatós polinom* n *(komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

6. *Legyenek* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *az összes* n*-edik egységgyökök.*
  a) *Bizonyítsuk be, hogy* $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1) \ldots (x - \varepsilon_n)$.
  b) *Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos* n*-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

7. *Írjuk fel az* $x^n + 1$ *és az* $x^{2n} - x^{2n-1} + - \cdots - x + 1$ *polinomokat gyöktényezős alakban.*

8. *Legyen* n *és* k *pozitív egész. Számítsuk ki az alábbi kitüntetett közös osztókat. Ugyanazt az eredményt fogjuk kapni* $\mathbb{C}$ *és* $\mathbb{Q}$ *fölött is?*
  a) $(x^n - 1, x^k - 1)$.
  b) $(x^n - 1, x^k + 1)$.
  c) $(x^n + 1, x^k + 1)$.

9. *Igazoljuk, hogy egy* $\mathbb{R}[x]$*-beli másodfokú polinom pontosan akkor irreducibilis* $\mathbb{R}$ *fölött, ha nincsen valós gyöke.*

10. *Bontsuk fel a következő polinomokat az* $\mathbb{R}$ *fölött irreducibilis polinomok szorzatára:* $x^4 - 1$, $x^6 - 4x^3 + 3$, $x^4 + 1$, $x^4 + 4$.

11. *Igaz-e* $\mathbb{Z}_2[x]$*-ben, hogy egy másodfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha nincs* $\mathbb{Z}_2$*-ben gyöke? Igaz-e ez az állítás harmadfokú polinomra? És negyedfokúra? Írjuk fel az összes legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomot* $\mathbb{Z}_2[x]$*-ben.*

12. *Bontsuk fel a* $\mathbb{Z}_2[x]$*-beli* $x^6 + x^2 + x + 1$ *polinomot* $\mathbb{Z}_2[x]$*-beli irreducibilisek szorzatára.*

13. *Adjunk meg olyan 2003-adfokú polinomot* $\mathbb{Z}_2[x]$*-ben, amelynek nincsen gyöke* $\mathbb{Z}_2$*-ben.*

14. *Legyen* n *pozitív egész. Hányszoros gyöke a* $\mathbb{Z}_2[x]$*-beli* $x^n + 1$ *polinomnak az 1?*

15. *Osztható-e a* $\mathbb{C}[x]$*-beli* $4x^{2000} + 4x^{1111} + 5x^{762} - 1$ *polinom* $x^2 \pm x + 1$*-gyel?*

16. *Tegyük fel, hogy a* $\mathbb{C}[x]$*-beli* f *és* $g(x) = x - c$ *polinom együtthatói egész számok.*
  a) *Mutassuk meg, hogy ha* f*-et maradékosan osztjuk* g*-vel, akkor a maradék is és a hányados is egész együtthatós.*
  b) *Igaz-e a megfelelő állítás, ha* $g(x) = 3x + c$ *alakú?*
  c) *Milyen feltétellel garantálhatjuk, hogy két egész együtthatós polinom maradékos osztásakor a maradék és a hányados is biztosan egész együtthatós legyen?*