Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Második alkalom (2003. február 25)

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*

a) $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$.
b) $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.
c) $(1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8)(-1 + 2x^2)$.
d) $(x - 1)(x - \varepsilon)(x - \overline{\varepsilon})$, *ahol ε primitív harmadik egységgyök.*

2. *Legyen f és g két polinom $\mathbb{C}[x]$-ben. Mi lehet $f+g$ foka, ha $\deg(f) = 18$ és $\deg(g) = 63$? És akkor ha $\deg(f) = \deg(g) = 63$?*

3. *Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.*

4. *Legyen T test, és $f \in T[x]$. Hogyan állapítható meg, hogy f mit ad maradékul, ha maradékosan elosztjuk*

a) *x-szel;*
b) *$2x$-szel;*
c) *$(x + 1)$-gyel?*

5. *Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

6. *Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 - 1$-gyel illetve $x^2 + 1$-gyel?*

7. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x : 2$ maradékos osztás?*

8. *Mely polinomoknak van inverzük $\mathbb{R}[x]$-ben? Általánosítható-e ez az állítás $\mathbb{R}$ helyett tetszőleges gyűrűre? És testre?*

9. *Írjuk fel az összes polinomfüggvényt $\mathbb{Z}_2$ fölött. Nullosztómentes gyűrűt alkotnak-e ezek?*

10. *Legyen p páratlan prímszám, és tekintsük az alábbi, $\mathbb{Z}_p$ fölötti polinomokat. Melyekhez tartozik ugyanaz a polinomfüggvény?*

$$x^p\,, \quad x+1\,, \quad x^2+1\,, \quad x^p+1\,, \quad x^2+x+1\,, \quad x^{2p}+x^{p-1}+x\,.$$

11. *Gyűrűt alkotnak-e $\mathbb{C}[x]$ alábbi részhalmazai a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve?*

a) *A legfeljebb 2003 fokú polinomok (ideértve a nulla polinomot is, aminek nincs foka).*
b) *Az 1953 fokú polinomok.*
c) *A páros fokú polinomok (ideértve a nulla polinomot is, aminek nincs foka).*
d) *Az egész együtthatós polinomok.*
e) *Azok a polinomok, amelyek minden együtthatója nemnegatív valós szám.*
f) *Azok a polinomok, amelyek konstans tagja racionális szám.*

12. *Tegyük fel, hogy egy valós együtthatós polinom minden valós helyen pozitív értéket vesz föl. Következik-e ebből, hogy minden együtthatója nemnegatív?*

13*. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy f racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha a „racionális” szó helyett mindenütt „egész” szerepel?*