Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Első alkalom (2003. február 18)

1. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az invertálható elemeket.*

a) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

b) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

c) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol a, b nemnegatív valós, a komplex számok összeadására és szorzására.*

d) *Az $a+b\sqrt{3}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

e) *Az $a+b\sqrt[3]{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

f) *A modulo 12 vett páros maradékok a modulo 12 összeadásra és szorzásra.*

g) *A modulo 13 vett páros maradékok a modulo 13 összeadásra és szorzásra.*

h) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése (tehát $Y+Z$ elemei azok, melyek Y és Z közül pontosan egyben vannak benne), a szorzás pedig a metszetképzés.*

2. *Végezzük el a $\mathbb{Z}_{17}$ testben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat.*

3. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{10}$ gyűrű invertálható elemeit. Általánosítsuk a feladatot.*

4. *Gyűrűt ill. testet alkotnak-e azok a racionális számok (a racionális számok szokásos összeadására és szorzására) amelyek felírhatók olyan tört alakban, amelynek*

a) *a nevezője páratlan;*

b) *a nevezője 2-hatvány;*

c) *a számlálója páros, a nevezője pedig páratlan?*

Van-e egységelem, és (ha van, erre nézve) mely elemeknek létezik inverze?

5. *Hány olyan elem lehet egy kommutatív testben, melynek négyzete az egységelem?*

6*. *Legyen ε primitív n-edik egységgyök. Mi lesz $-\varepsilon$ rendje?*

7*. *Képzeljünk el egy doboz „Medve" sajtot abból a fajtából, amelyben hat darab sajt van. Tegyük fel, hogy a hatból három sajtot már megettünk, és a dobozban maradt három sajt is esetleg elmozdult egymáshoz képest úgy, hogy azért a „csúcsuk" továbbra is a doboz középpontjában van, és ívelt oldaluk illeszkedik a doboz kör alakú széléhez. Jelölje a sajtoknak a középpontban levőktől különböző csúcsait — az óramutató járásával megegyező irányban haladva — rendre A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Mutassuk meg, hogy az A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.*

8*. *Legyenek z_1, z_2, z_3 és z_4 a komplex számsík páronként különböző pontjai.*

a) *Milyen számnak kell lennie a $(z_2 - z_1)/(z_3 - z_2)$ hányadosnak ahhoz, hogy z_1, z_2 és z_3 egy egyenesbe essen?*

b) *Milyen számnak kell lennie a z_1, z_2, z_3 és z_4 számok kettősviszonyának, azaz a*

$$(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Bigg/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

hányadosnak ahhoz, hogy a négy szám egy egyenesen vagy egy körön legyen?

c) *Igazoljuk Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza a, b, c, d, átlóinak hossza e és f, akkor $ac+bd \geq ef$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha ez húrnégyszög.*